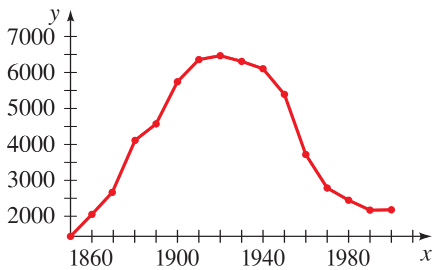
**30. Granjas en Estados Unidos** La gráfica siguiente da el número de granjas en Estados Unidos de 1850 a 2000.

**(a)** Estime la rapidez de cambio promedio en el número de granjas entre (i) 1860 y 1890 y (ii) 1950 y 1970.

**(b)** ¿En cuál década experimentó el número de granjas la máxima rapidez de cambio promedio?

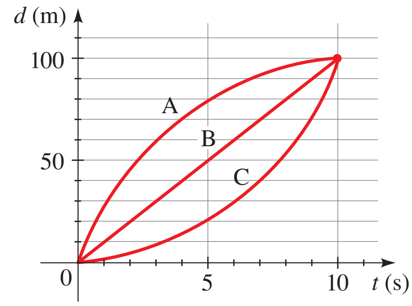



## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**31. Carrera de 100 metros** Una carrera de 100 metros termina en un empate triple para el primer lugar. La gráfica siguiente muestra la distancia como función del tiempo para cada uno de los tres ganadores.

**(a)** Encuentre el promedio de rapidez para cada ganador.

**(b)** Describa la diferencia entre las formas en las que los tres atletas corrieron la carrera.




**32. Las funciones lineales tienen rapidez de cambio constante** Si $f(x) = mx + b$ es una función lineal, entonces la rapidez de cambio promedio de $f$ entre cualesquier dos números reales $x_1$ y $x_2$ es

$$\text{rapidez de cambio promedio} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Calcule esta rapidez de cambio promedio para demostrar que es igual que la pendiente $m$.

**33. Las funciones con rapidez de cambio constante son lineales** Si la función $f$ tiene la misma rapidez de cambio promedio $c$ entre cualesquier dos puntos, entonces para los puntos $a$ y $x$ tenemos

$$c = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Reacomode esta expresión para demostrar que

$$f(x) = cx + (f(a) - ca)$$

y concluya que $f$ es una función lineal.

# 2.5 TRANSFORMACIONES DE FUNCIONES

Desplazamiento vertical ▶ Desplazamiento horizontal ▶ Gráficas que se reflejan ▶ Alargamiento y contracción verticales ▶ Alargamiento y contracción horizontales ▶ Funciones pares e impares

En esta sección estudiamos la forma en que ciertas transformaciones de una función afectan su gráfica. Esto nos dará una mejor idea de cómo graficar funciones. Las transformaciones que estudiamos son desplazamiento, reflexión y alargamiento.

## ▼ Desplazamiento vertical

Sumar una constante a una función desplaza verticalmente su gráfica; hacia arriba si la constante es positiva y hacia abajo si es negativa.

En general, suponga que conocemos la gráfica de $y = f(x)$. ¿Cómo obtenemos de ella las gráficas de lo siguiente?

Recuerde que la gráfica de la función $f$ es igual que la gráfica de la ecuación $y = f(x)$.

$$y = f(x) + c \qquad \text{y} \qquad y = f(x) - c \qquad (c > 0)$$

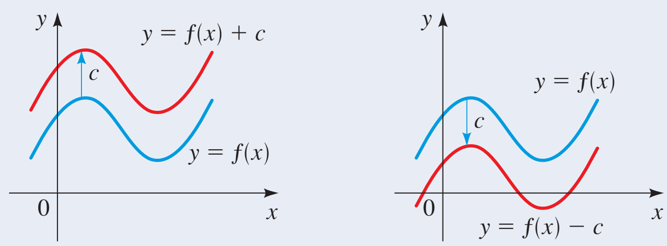
La coordenada $y$ de cada punto en la gráfica de $y = f(x) + c$ está $c$ unidades arriba de la coordenada $y$ del punto correspondiente en la gráfica de $y = f(x)$. Por tanto, obtenemos la gráfica de $y = f(x) + c$ simplemente desplazando la gráfica de $y = f(x)$ hacia arriba $c$ unidades. Del mismo modo, obtenemos la gráfica de $y = f(x) - c$ desplazando la gráfica de $y = f(x)$ hacia abajo $c$ unidades.

### DESPLAZAMIENTOS VERTICALES DE GRÁFICAS

Suponga $c > 0$.

Para graficar $y = f(x) + c$, desplace la gráfica de $y = f(x)$ $c$ unidades hacia arriba.

Para graficar $y = f(x) - c$, desplace la gráfica de $y = f(x)$ $c$ unidades hacia abajo.




## EJEMPLO 1 | Desplazamientos verticales de gráficas

Use la gráfica de $f(x) = x^2$ para trazar la gráfica de cada función.

**(a)** $g(x) = x^2 + 3$ **(b)** $h(x) = x^2 - 2$

**SOLUCIÓN** La función $f(x) = x^2$ se graficó en el Ejemplo 1(a), Sección 2.2. Está trazada otra vez en la Figura 1.

**(a)** Observe que

$$g(x) = x^2 + 3 = f(x) + 3$$

Entonces la coordenada $y$ de cada punto sobre la gráfica de $g$ está 3 unidades arriba del punto correspondiente en la gráfica de $f$. Esto significa que para graficar $g$ desplazamos 3 unidades hacia arriba la gráfica de $f$, como en la Figura 1.

**(b)** Análogamente, para graficar $h$, desplazamos 2 unidades hacia abajo la gráfica de $f$, como en la Figura 1.

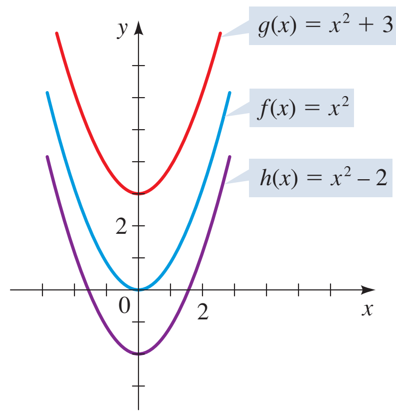



**FIGURA 1**

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **21** Y **23**

## Desplazamiento horizontal

Suponga que conocemos la gráfica de $y = f(x)$. ¿Cómo la usamos para obtener las gráficas de lo siguiente?

$$y = f(x + c) \qquad \text{y} \qquad y = f(x - c) \qquad (c > 0)$$

El valor de $f(x - c)$ en $x$ es igual que el valor de $f(x)$ en $x - c$. Como $x - c$ está $c$ unidades a la izquierda de $x$, se deduce que la gráfica de $y = f(x - c)$ es justo la gráfica de $y = f(x)$

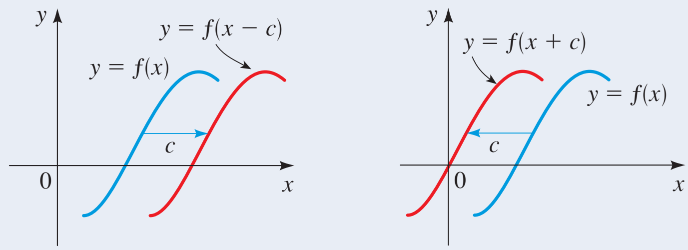
desplazada a la derecha $c$ unidades. Un razonamiento similar muestra que la gráfica de $y = f(x + c)$ es la gráfica de $y = f(x)$ desplazada a la izquierda $c$ unidades. El siguiente cuadro resume estos datos.

### DESPLAZAMIENTOS HORIZONTALES DE GRÁFICAS

Suponga $c > 0$.

Para graficar $y = f(x - c)$, desplace la gráfica de $y = f(x)$ $c$ unidades a la derecha.

Para graficar $y = f(x + c)$, desplace la gráfica de $y = f(x)$ $c$ unidades a la izquierda.




## EJEMPLO 2 | Desplazamientos horizontales de gráficas

Use la gráfica de $f(x) = x^2$ para trazar la gráfica de cada función.

**(a)** $g(x) = (x + 4)^2$ **(b)** $h(x) = (x - 2)^2$

### SOLUCIÓN

**(a)** Para graficar $g$, desplazamos 4 unidades a la izquierda la gráfica de $f$.

**(b)** Para graficar $h$, desplazamos 2 unidades a la derecha la gráfica de $f$.

Las gráficas de $g$ y $h$ están trazadas en la Figura 2.

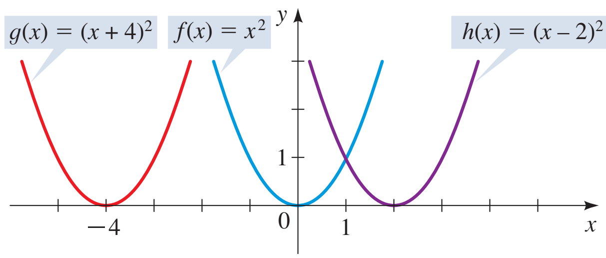
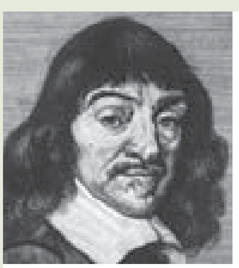



**FIGURA 2**

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **25** Y **27**



Library of Congress

**RENÉ DESCARTES** (1596-1650) nació en la población de La Haye en el sur de Francia. Desde sus primeros años gustaba de las matemáticas por "la certeza de sus resultados y la claridad de su razonamiento". Creía que para llegar a la verdad uno debe empezar por dudar de todo, incluyendo nuestra propia existencia; esto le llevó a formular quizá la frase mejor conocida de toda la filosofía: "Pienso, luego existo." En su libro *Discurso del Método* describió lo que ahora se conoce como plano cartesiano. Esta idea de combinar álgebra y geometría hizo posible que los matemáticos por primera vez graficaran funciones y así "vieran" las ecuaciones que estaban estudiando. El filósofo John Stuart Mill llamó a esta invención "el paso más grande jamás dado en el progreso de las ciencias exactas". A Descartes le gustaba levantarse tarde y pasar la mañana en cama pensando y escribiendo. Inventó el plano de coordenadas estando en cama y viendo una mosca moverse en el techo, razonando que él podría describir la ubicación exacta de la mosca si supiera su distancia desde dos paredes perpendiculares. En 1649 Descartes se convirtió en tutor de la reina Cristina de Suecia, quien gustaba de sus lecciones a las 5 de la mañana cuando, decía, su mente estaba más aguda. Pero, el cambio en los hábitos de Descartes y la helada biblioteca donde estudiaba fueron demasiado para él. En febrero de 1650, después de una estancia de sólo dos meses, contrajo pulmonía y murió.

**LAS MATEMÁTICAS EN EL MUNDO MODERNO**

**Computadoras**

Durante siglos se han diseñado máquinas para que ejecuten trabajos específicos. Por ejemplo, una lavadora lava ropa, una tejedora teje telas, una sumadora suma números, y así sucesivamente. La computadora ha cambiado todo esto.

La computadora es una máquina que no hace nada sino hasta que se le dan instrucciones para que haga algo. Así es que una computadora puede jugar juegos, trazar imágenes o calcular $\pi$ a un millón de lugares decimales; todo depende de qué programa (o instrucciones) se le den a la computadora. Ésta puede hacer todo esto porque puede aceptar instrucciones y lógicamente cambiar esas instrucciones basadas en datos de entrada. Esta versatilidad hace útiles a las computadoras en casi todo aspecto de la vida humana.

La idea de una computadora fue descrita teóricamente en la década de 1940 por el matemático Allan Turing (vea página 100) en lo que él llamó *máquina universal*. En 1945 el matemático John Von Neumann, ampliando las ideas de Turing, construyó una de las primeras computadoras electrónicas.

Los matemáticos continúan perfeccionando nuevas bases teóricas para el diseño de computadoras. El corazón de la computadora es el "chip", que es capaz de procesar instrucciones lógicas. Para tener idea de la complejidad de un chip, considere que el chip Pentium tiene más de 3.5 millones de circuitos lógicos.

**EJEMPLO 3 | Combinación de desplazamientos horizontal y vertical**

Trace la gráfica de $f(x) = \sqrt{x-3} + 4$.

**SOLUCIÓN** Empezamos con la gráfica de $y = \sqrt{x}$ (Ejemplo 1(c), Sección 2.2) y la desplazamos 3 unidades a la derecha para obtener la gráfica de $y = \sqrt{x-3}$. A continuación desplazamos la gráfica resultante 4 unidades hacia arriba para obtener la gráfica de $f(x) = \sqrt{x-3} + 4$ que se ve en la Figura 3.

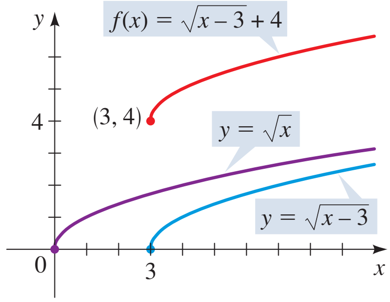



**FIGURA 3**

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **37**

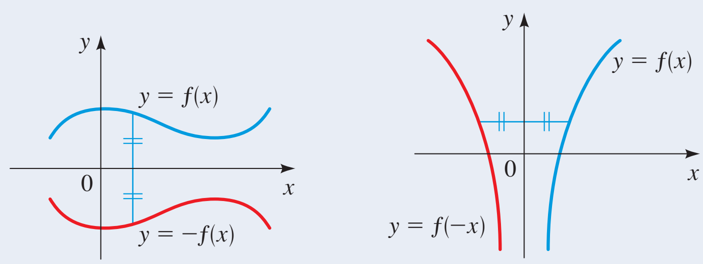
## Gráficas que se reflejan

Suponga que conocemos la gráfica de $y = f(x)$. ¿Cómo la usamos para obtener las gráficas de $y = -f(x)$ y $y = f(-x)$? La coordenada $y$ de cada uno de los puntos en la gráfica de $y = -f(x)$ es simplemente el negativo de la coordenada $y$ del punto correspondiente en la gráfica de $y = f(x)$. Por lo tanto, la gráfica deseada es la reflexión de la gráfica de $y = f(x)$ en el eje $x$. Por otra parte, el valor de $y = f(-x)$ en $x$ es igual al valor de $y = f(x)$ en $-x$, por lo que la gráfica deseada aquí es la reflexión de la gráfica de $y = f(x)$ en el eje $y$. En el siguiente recuadro se resumen estas observaciones.

**GRÁFICAS QUE SE REFLEJAN**

Para graficar $y = -f(x)$, refleje la gráfica de $y = f(x)$ en el eje $x$.

Para graficar $y = f(-x)$, refleje la gráfica de $y = f(x)$ en el eje $y$.




**EJEMPLO 4 | Gráficas que se reflejan**

Trace la gráfica de cada función.

**(a)** $f(x) = -x^2$ **(b)** $g(x) = \sqrt{-x}$

**SOLUCIÓN**

**(a)** Empezamos con la gráfica de $y = x^2$. La gráfica de $f(x) = -x^2$ es la gráfica de $y = x^2$ reflejada en el eje $x$ (vea Figura 4).

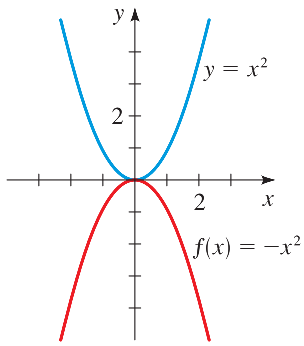



**FIGURA 4**

**(b)** Empezamos con la gráfica de $y = \sqrt{x}$ (Ejemplo 1(c) en la Sección 2.2.) La gráfica de $g(x) = \sqrt{-x}$ es la gráfica de $y = \sqrt{x}$ reflejada en el eje $y$ (vea Figura 5). Observe que el dominio de la función $g(x) = \sqrt{-x}$ es $\{x \mid x \leq 0\}$..

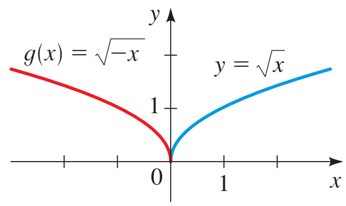



**FIGURA 5**

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **29** Y **31**

## Alargamiento y contracción verticales

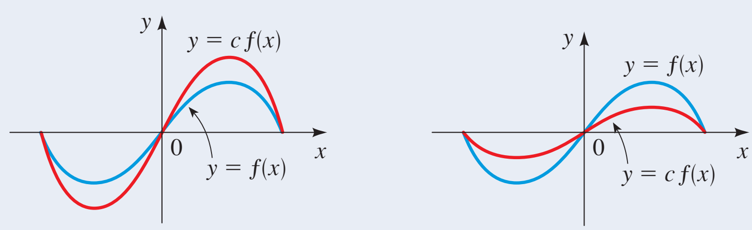
Suponga que conocemos la gráfica de $y = f(x)$. ¿Cómo la usamos para obtener la gráfica de $y = cf(x)$? La coordenada $y$ de $y = cf(x)$ en $x$ es igual que la coordenada $y$ correspondiente de $y = f(x)$ multiplicada por $c$. Multiplicar las coordenadas por $c$ tiene el efecto de alargar o contraer verticalmente la gráfica en un factor de $c$.

### ALARGAMIENTO Y CONTRACCIÓN VERTICALES DE GRÁFICAS

Para graficar $y = cf(x)$:

Si $c > 1$, alargue la gráfica de $y = f(x)$ verticalmente en un factor de $c$.

Si $0 < c < 1$, contraiga la gráfica de $y = f(x)$ verticalmente en un factor de $c$.




$c > 1$ $\qquad$ $0 < c < 1$

## EJEMPLO 5 | Alargamiento y contracción verticales de gráficas

Use la gráfica de $f(x) = x^2$ para trazar la gráfica de cada función.

**(a)** $g(x) = 3x^2$ $\qquad$ **(b)** $h(x) = \frac{1}{3}x^2$

**SOLUCIÓN**

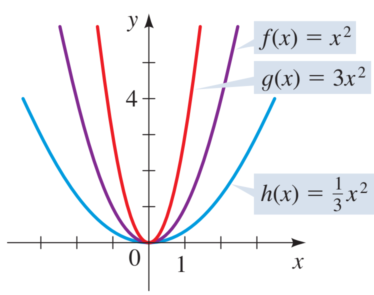



**FIGURA 6**

**(a)** La gráfica de $g$ se obtiene al multiplicar por 3 la coordenada $y$ de cada punto de la gráfica. Esto es, para obtener la gráfica de $g$, alargamos la gráfica de $f$ verticalmente en un factor de 3. El resultado es la parábola más angosta de la Figura 6.

**(b)** La gráfica de $h$ se obtiene al multiplicar por $\frac{1}{3}$ la coordenada $y$ de cada punto de la gráfica de $f$. Esto es, para obtener la gráfica de $h$, contraemos la gráfica de $f$ verticalmente en un factor de $\frac{1}{3}$. El resultado es la parábola más ancha de la Figura 6.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **33** Y **35**

Ilustramos el efecto de combinar desplazamientos, reflexiones y alargamiento en el siguiente ejemplo.

## EJEMPLO 6 | Combinar desplazamiento, alargamiento y reflexión

Alargue la gráfica de la función $f(x) = 1 - 2(x - 3)^2$.

**SOLUCIÓN** Empezando con la gráfica de $y = x^2$, primero desplazamos a la derecha 3 unidades para obtener la gráfica de $y = (x - 3)^2$. A continuación reflejamos en el eje $x$ y alargamos por un factor de 2 para obtener la gráfica de $y = -2(x - 3)^2$. Finalmente, desplazamos hacia arriba 1 unidad para obtener la gráfica de $f(x) = 1 - 2(x - 3)^2$ que se ve en la Figura 7.

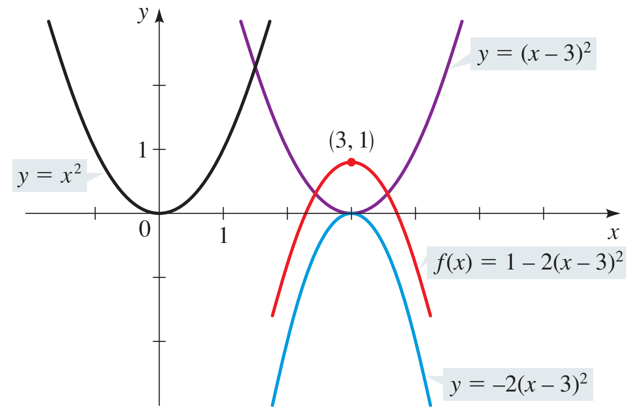



**FIGURA 7**

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **39**

## Alargamiento y contracción horizontales

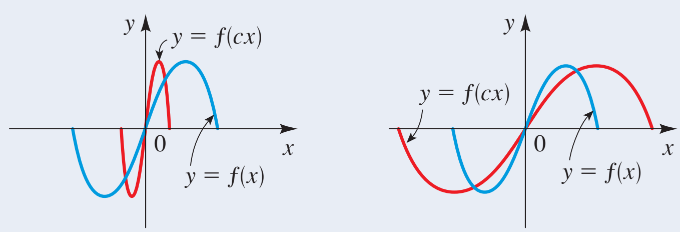
Ahora consideramos la contracción y alargamiento horizontales de gráficas. Si conocemos la gráfica de $y = f(x)$, entonces ¿cómo está relacionada con ella la gráfica de $y = f(cx)$? La coordenada $y$ de $y = f(cx)$ en $x$ es la misma que la coordenada $y$ de $y = f(x)$ en $cx$. Por lo tanto, las coordenadas $x$ de la gráfica de $y = f(x)$ corresponden a las coordenadas $x$ de la gráfica de $y = f(cx)$ multiplicada por $c$. Viendo esto a la inversa, observamos que las coordenadas $x$ de la gráfica de $y = f(cx)$ son las coordenadas $x$ de la gráfica de $y = f(x)$ multiplicada por $1/c$. En otras palabras, para cambiar la gráfica de $y = f(x)$ a la gráfica de $y = f(cx)$, debemos contraer (o alargar) la gráfica horizontalmente en un factor de $1/c$, como se resume en el siguiente recuadro.

### CONTRACCIÓN Y ALARGAMIENTO HORIZONTALES DE GRÁFICAS

Para graficar $y = f(cx)$:

Si $c > 1$, contraiga la gráfica de $y = f(x)$ horizontalmente en un factor de $1/c$.

Si $0 < c < 1$, alargue la gráfica de $y = f(x)$ horizontalmente en un factor de $1/c$.

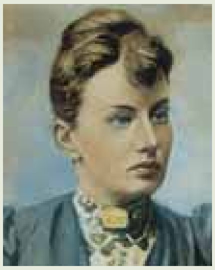



$c > 1$ $\qquad$ $0 < c < 1$

## EJEMPLO 7 | Alargamiento y contracción horizontales de gráficas

La gráfica de $y = f(x)$ se muestra en la Figura 8 de la página siguiente. Trace la gráfica de cada función.

**(a)** $y = f(2x)$ $\qquad$ **(b)** $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$



The Granger Collection, New York

**SONYA KOVALEVSKY** (1850-1891) es considerada la mujer matemática más importante del siglo XIX. Nació en Moscú de una familia aristocrática. Cuando era niña, estudió los principios de cálculo en una forma muy poco común: su habitación estaba temporalmente tapizada con las páginas de un libro de cálculo. Tiempo después escribió que "pasaba muchas horas frente a aquella pared, tratando de entenderla". Como las leyes rusas prohibían que las mujeres estudiaran en universidades contrajo un matrimonio por conveniencia, lo que le permitió viajar a Alemania y obtener un doctorado en matemáticas de la Universidad de Göttingen. Finalmente se le otorgó un profesorado de tiempo completo en la universidad de Estocolmo, donde fue profesora durante ocho años antes de morir por una epidemia de gripe a la edad de 41 años. Su investigación fue de gran utilidad para ayudar a poner las ideas y aplicaciones de funciones y cálculo en una base sólida y lógica. Recibió numerosos homenajes y premios por sus trabajos de investigación.

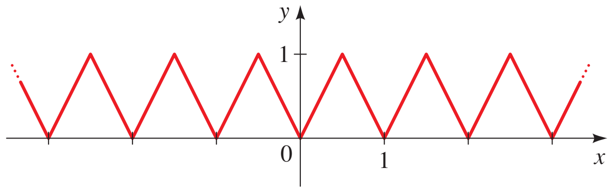



**FIGURA 8** $y = f(x)$

**SOLUCIÓN** Usando los principios descritos en el recuadro precedente, obtener las gráficas de las Figuras 9 y 10.

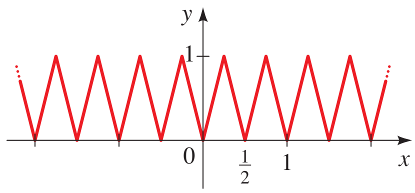



**FIGURA 9** $y = f(2x)$

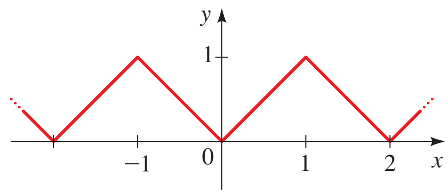



**FIGURA 10** $y = f(\frac{1}{2}x)$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **63**

## Funciones pares e impares

Si una función $f$ satisface $f(-x) = f(x)$ para todo número $x$ en su dominio, entonces $f$ recibe el nombre de **función par**. Por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ es función par porque

$$f(-x) = (-x)^2 = (-1)^2x^2 = x^2 = f(x)$$

La gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje $y$ (vea Figura 11). Esto significa que si hemos trazado la gráfica de $f$ para $x \geq 0$, entonces podemos obtener toda la gráfica simplemente al reflejar esta parte en el eje $y$.

Si $f$ satisface $f(-x) = -f(x)$ para todo número $x$ en su dominio, entonces $f$ se denomina **función impar**. Por ejemplo, la función $f(x) = x^3$ es impar porque

$$f(-x) = (-x)^3 = (-1)^3x^3 = -x^3 = -f(x)$$

La gráfica de una función impar es simétrica alrededor del origen (vea Figura 12). Si hemos trazado la gráfica de $f$ para $x \geq 0$, entonces podemos obtener toda la gráfica al girar esta parte 180° alrededor del origen. (Esto es equivalente a reflejar primero en el eje $x$ y luego en el eje $y$.)

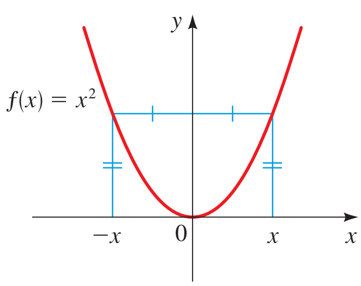



**FIGURA 11** $f(x) = x^2$ es una función par.

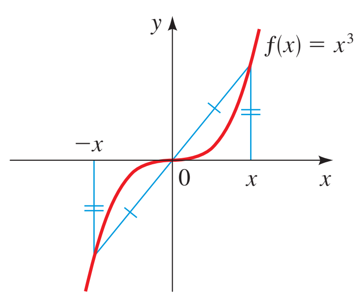


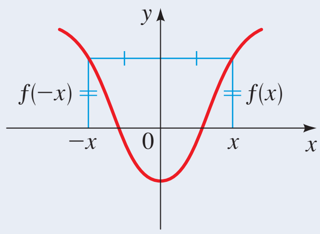

**FIGURA 12** $f(x) = x^3$ es una función impar.

### FUNCIONES PARES E IMPARES

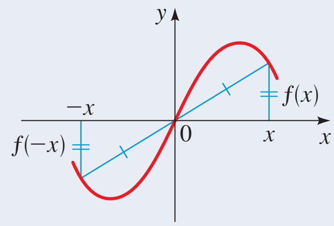
Sea $f$ una función.

$f$ es **par** si $f(-x) = f(x)$ para toda $x$ en el dominio de $f$.

$f$ es **impar** si $f(-x) = -f(x)$ para toda $x$ en el dominio de $f$.




La gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje $y$.




La gráfica de una función impar es simétrica con respecto al origen.

## EJEMPLO 8 | Funciones par e impar

Determine si las funciones son par, impar, o ninguna de éstas.

**(a)** $f(x) = x^5 + x$

**(b)** $g(x) = 1 - x^4$

**(c)** $h(x) = 2x - x^2$

### SOLUCIÓN

**(a)**
$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^5 + (-x) \\ &= -x^5 - x = -(x^5 + x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Por tanto, $f$ es una función impar.

**(b)** $g(-x) = 1 - (-x)^4 = 1 - x^4 = g(x)$

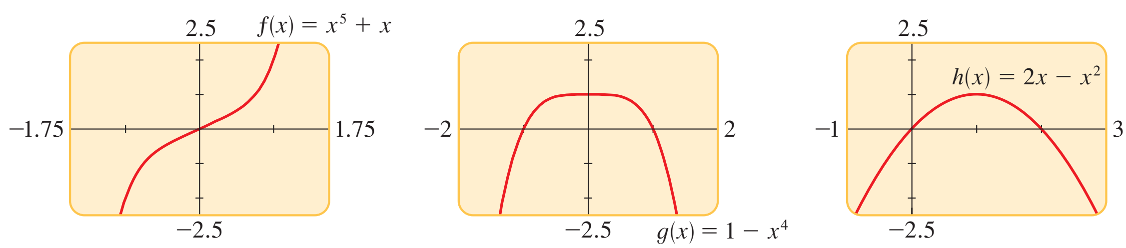
Por tanto, $g$ es par.

**(c)** $h(-x) = 2(-x) - (-x)^2 = -2x - x^2$

Como $h(-x) \neq h(x)$ y $h(-x) \neq -h(x)$, concluimos que $h$ no es ni par ni impar.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **75, 77** Y **79**

Las gráficas de las funciones del Ejemplo 8 se muestran en la Figura 13. La gráfica de $f$ es simétrica alrededor del origen, y la gráfica de $g$ es simétrica alrededor del eje $y$. La gráfica de $h$ no es simétrica ya sea alrededor del eje $y$ o del origen.




(a) (b) (c)

**FIGURA 13**

# 2.5 EJERCICIOS

## CONCEPTOS

**1-2** ■ Llene el espacio en blanco con la dirección apropiada (izquierda, derecha, hacia arriba o hacia abajo).

**1. (a)** La gráfica de $y = f(x) + 3$ se obtiene de la gráfica de $y = f(x)$ al desplazar ________ 3 unidades.

**(b)** La gráfica de $y = f(x + 3)$ se obtiene de la gráfica de $y = f(x)$ al desplazar ______3 unidades.

**2. (a)** La gráfica de $y = f(x) - 3$ se obtiene de la gráfica de $y = f(x)$ al desplazar _____ 3 unidades.

**(b)** La gráfica de $y = f(x - 3)$ se obtiene de la gráfica de $y = f(x)$ al desplazar _____ 3 unidades.

**3.** Llene el espacio en blanco con el eje apropiado (eje $x$ o eje $y$)

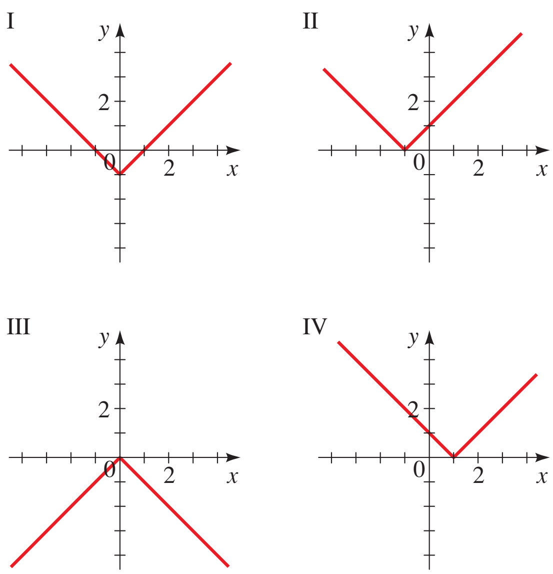
**(a)** La gráfica de $y = -f(x)$ se obtiene de la gráfica de $y = f(x)$ al reflejar en el ________.

**(b)** La gráfica de $y = f(-x)$ se obtiene de la gráfica de $y = f(x)$ al reflejar en el ________.

**4.** Relacione la gráfica con la función.

**(a)** $y = |x + 1|$ **(b)** $y = |x - 1|$

**(c)** $y = |x| - 1$ **(d)** $y = -|x|$




## HABILIDADES

**5-14** ■ Suponga que nos dan la gráfica de $f$. Describa la forma en que la gráfica de cada función se puede obtener a partir de la gráfica de $f$.

**5. (a)** $y = f(x) - 5$ **(b)** $y = f(x - 5)$

**6. (a)** $y = f(x + 7)$ **(b)** $y = f(x) + 7$

**7. (a)** $y = -f(x)$ **(b)** $y = f(-x)$

**8. (a)** $y = -2f(x)$ **(b)** $y = -\frac{1}{2}f(x)$

**9. (a)** $y = -f(x) + 5$ **(b)** $y = 3f(x) - 5$

**10. (a)** $y = f(x - 4) + \frac{3}{4}$ **(b)** $y = f(x + 4) - \frac{3}{4}$

**11. (a)** $y = 2f(x + 1) - 3$ **(b)** $y = 2f(x - 1) + 3$

**12. (a)** $y = 3 - 2f(x)$ **(b)** $y = 2 - f(-x)$

**13. (a)** $y = f(4x)$ **(b)** $y = f(\frac{1}{4}x)$

**14. (a)** $y = f(2x) - 1$ **(b)** $y = 2f(\frac{1}{2}x)$

**15-18** ■ Explique cómo se obtiene la gráfica de $g$ a partir de la gráfica de $f$.

**15. (a)** $f(x) = x^2, \quad g(x) = (x + 2)^2$
**(b)** $f(x) = x^2, \quad g(x) = x^2 + 2$

**16. (a)** $f(x) = x^3, \quad g(x) = (x - 4)^3$
**(b)** $f(x) = x^3, \quad g(x) = x^3 - 4$

**17. (a)** $f(x) = |x|, \quad g(x) = |x + 2| - 2$
**(b)** $f(x) = |x|, \quad g(x) = |x - 2| + 2$

**18. (a)** $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = -\sqrt{x} + 1$
**(b)** $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = \sqrt{-x} + 1$

**19.** Use la gráfica de $y = x^2$ de la Figura 4 para graficar lo siguiente.

**(a)** $g(x) = x^2 + 1$
**(b)** $g(x) = (x - 1)^2$
**(c)** $g(x) = -x^2$
**(d)** $g(x) = (x - 1)^2 + 3$

**20.** Use la gráfica de $y = \sqrt{x}$ de la Figura 5 para graficar lo siguiente.

**(a)** $g(x) = \sqrt{x - 2}$
**(b)** $g(x) = \sqrt{x} + 1$
**(c)** $g(x) = \sqrt{x + 2} + 2$
**(d)** $g(x) = -\sqrt{x} + 1$

**21-44** ■ Trace la gráfica de la función, no localizando los puntos sino empezando con la gráfica de una función estándar y aplicando transformaciones.

**21.** $f(x) = x^2 - 1$

**22.** $f(x) = x^2 + 5$

**23.** $f(x) = \sqrt{x} + 1$

**24.** $f(x) = |x| - 1$

**25.** $f(x) = (x - 5)^2$

**26.** $f(x) = (x + 1)^2$

**27.** $f(x) = \sqrt{x + 4}$

**28.** $f(x) = |x - 3|$

**29.** $f(x) = -x^3$

**30.** $f(x) = -|x|$

**31.** $y = \sqrt[4]{-x}$

**32.** $y = \sqrt[3]{-x}$

**33.** $y = \frac{1}{4}x^2$

**34.** $y = -5\sqrt{x}$

**35.** $y = 3|x|$

**36.** $y = \frac{1}{2}|x|$

**37.** $y = (x - 3)^2 + 5$

**38.** $y = \sqrt{x + 4} - 3$

**39.** $y = 3 - \frac{1}{2}(x - 1)^2$

**40.** $y = 2 - \sqrt{x + 1}$

**41.** $y = |x + 2| + 2$

**42.** $y = 2 - |x|$

**43.** $y = \frac{1}{2}\sqrt{x + 4} - 3$

**44.** $y = 3 - 2(x - 1)^2$

**45-54** ■ Nos dan una función $f$, y las transformaciones indicadas se aplican a su gráfica (en el orden dado). Escriba la ecuación para la gráfica final transformada.

**45.** $f(x) = x^2$; desplazar hacia arriba 3 unidades

**46.** $f(x) = x^3$; desplazar hacia abajo 1 unidad

**47.** $f(x) = \sqrt{x}$; desplazar 2 unidades a la izquierda

**48.** $f(x) = \sqrt[3]{x}$; desplazar 1 unidad a la derecha

**49.** $f(x) = |x|$; desplazar 3 unidades a la derecha y desplazar 1 unidad hacia arriba

**50.** $f(x) = |x|$; desplazar 4 unidades a la izquierda y desplazar 1 unidad hacia abajo

**51.** $f(x) = \sqrt[4]{x}$; reflejar en el eje $y$ y desplazar hacia arriba 1 unidad

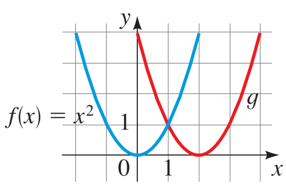
**52.** $f(x) = x^2$; desplazar 2 unidades a la izquierda y reflejar en el eje $x$

**53.** $f(x) = x^2$; alargar verticalmente en un factor de 2, desplazar hacia abajo 2 unidades y desplazar 3 unidades a la derecha

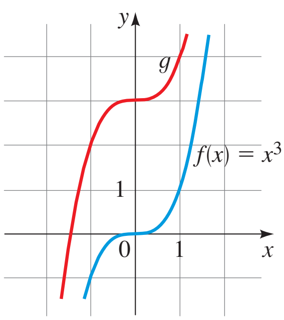
**54.** $f(x) = |x|$; contraer verticalmente en un factor de $\frac{1}{2}$, desplazar a la izquierda 1 unidad y desplazar hacia arriba 3 unidades.

**55-60** ■ Nos dan las gráficas de $f$ y de $g$. Encuentre una fórmula para la función $g$.

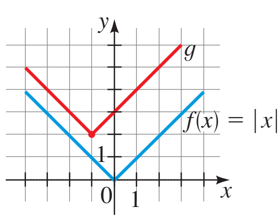
**55.**



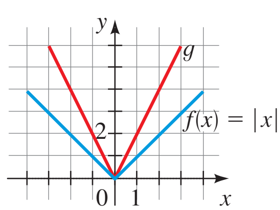

**56.**



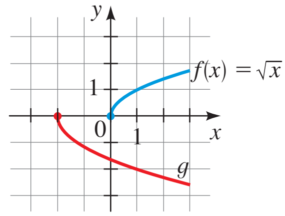

**57.**



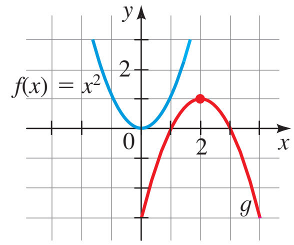

**58.**




**59.**

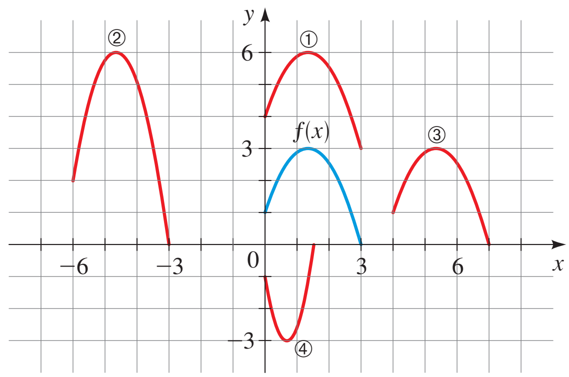



**60.**

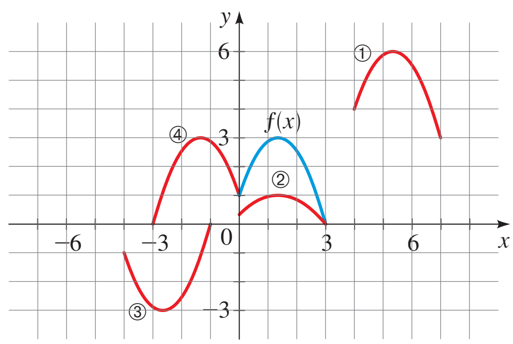



**61-62** ■ Nos dan la gráfica de $y = f(x)$. Relacione cada ecuación con su gráfica.

**61.** **(a)** $y = f(x - 4)$ **(b)** $y = f(x) + 3$
**(c)** $y = 2f(x + 6)$ **(d)** $y = -f(2x)$

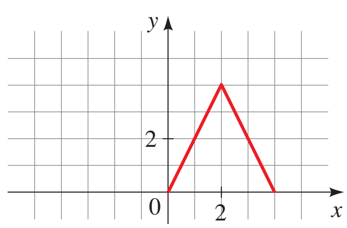



**62.** **(a)** $y = \frac{1}{3}f(x)$ **(b)** $y = -f(x + 4)$
**(c)** $y = f(x - 4) + 3$ **(d)** $y = f(-x)$



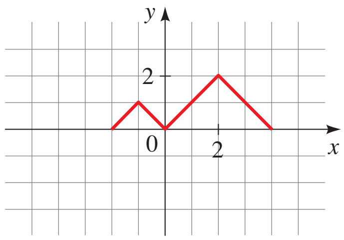

**63.** Nos dan la gráfica de $f$. Trace las gráficas de las siguientes funciones.

**(a)** $y = f(x - 2)$ **(b)** $y = f(x) - 2$
**(c)** $y = 2f(x)$ **(d)** $y = -f(x) + 3$
**(e)** $y = f(-x)$ **(f)** $y = \frac{1}{2}f(x - 1)$



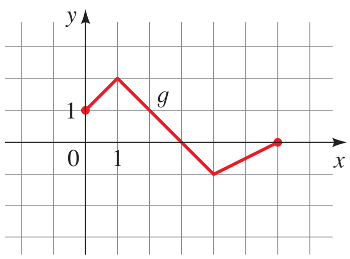
**64.** Nos dan la gráfica de $g$. Trace las gráficas de las siguientes funciones.

**(a)** $y = g(x + 1)$ **(b)** $y = g(-x)$
**(c)** $y = g(x - 2)$ **(d)** $y = g(x) - 2$
**(e)** $y = -g(x)$ **(f)** $y = 2g(x)$



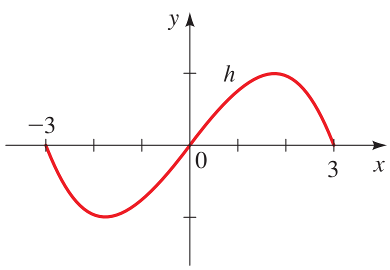

**65.** Nos dan la gráfica de $g$. Úsela para graficar cada una de las funciones siguientes.

**(a)** $y = g(2x)$ **(b)** $y = g(\frac{1}{2}x)$




**66.** Nos dan la gráfica de $h$. Úsela para graficar cada una de las funciones siguientes.

**(a)** $y = h(3x)$ **(b)** $y = h(\frac{1}{3}x)$




**67-68** ■ Use la gráfica de $f(x) = [\![x]\!]$ descrita en la página 156 para graficar la función indicada.

**67.** $y = [\![2x]\!]$ **68.** $y = [\![\frac{1}{4}x]\!]$

**69-72** ■ Grafique las funciones en cada pantalla usando el rectángulo de vista dado. ¿Cómo está relacionada cada gráfica con la gráfica de la parte (a)?

**69.** Rectángulo de vista $[-8, 8]$ por $[-2, 8]$
**(a)** $y = \sqrt[4]{x}$ **(b)** $y = \sqrt[4]{x + 5}$
**(c)** $y = 2\sqrt[4]{x + 5}$ **(d)** $y = 4 + 2\sqrt[4]{x + 5}$

**70.** Rectángulo de vista $[-8, 8]$ por $[-6, 6]$
**(a)** $y = |x|$ **(b)** $y = -|x|$
**(c)** $y = -3|x|$ **(d)** $y = -3|x - 5|$

**71.** Rectángulo de vista $[-4, 6]$ por $[-4, 4]$
**(a)** $y = x^6$ **(b)** $y = \frac{1}{3}x^6$
**(c)** $y = -\frac{1}{3}x^6$ **(d)** $y = -\frac{1}{3}(x - 4)^6$

**72.** Rectángulo de vista $[-6, 6]$ por $[-4, 4]$
**(a)** $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ **(b)** $y = \dfrac{1}{\sqrt{x + 3}}$
**(c)** $y = \dfrac{1}{2\sqrt{x + 3}}$ **(d)** $y = \dfrac{1}{2\sqrt{x + 3}} - 3$

**73.** Si $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$, grafique las siguientes funciones en el rectángulo de vista $[-5, 5]$ por $[-4, 4]$. ¿Cómo está relacionada cada gráfica con la gráfica de la parte (a)?

**(a)** $y = f(x)$ **(b)** $y = f(2x)$ **(c)** $y = f(\frac{1}{2}x)$

**74.** Si $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$, grafique las siguientes funciones en el rectángulo de vista $[-5, 5]$ por $[-4, 4]$. ¿Cómo está relacionada cada gráfica con la gráfica de la parte (a)?

**(a)** $y = f(x)$ **(b)** $y = f(-x)$
**(c)** $y = -f(-x)$ **(d)** $y = f(-2x)$
**(e)** $y = f(-\frac{1}{2}x)$

**75-82** ■ Determine si la función $f$ es par, impar, o ninguna de éstas. Si $f$ es par o impar, use simetría para trazar su gráfica.

**75.** $f(x) = x^4$ **76.** $f(x) = x^3$

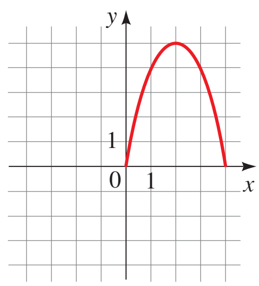
**77.** $f(x) = x^2 + x$ **78.** $f(x) = x^4 - 4x^2$

**79.** $f(x) = x^3 - x$ **80.** $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1$

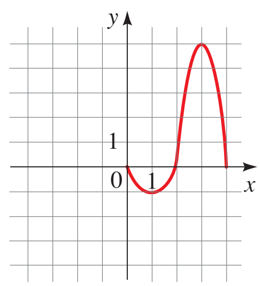
**81.** $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x}$ **82.** $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

**83-84** ■ Nos dan la gráfica de una función definida por $x \geq 0$. Complete la gráfica para $x < 0$ para hacer **(a)** una función par y **(b)** una función impar.

**83.**

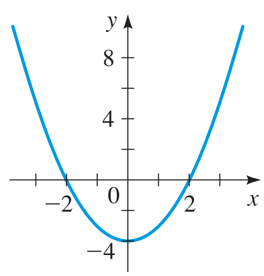



**84.**

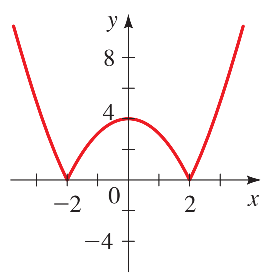



**85-86** ■ Estos ejercicios muestran cómo se obtiene la gráfica de $y = |f(x)|$ a partir de la gráfica de $y = f(x)$.

**85.** A continuación se presentan las gráficas de $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = |x^2 - 4|$. Explique cómo se obtiene la gráfica de $g$ a partir de la gráfica de $f$.

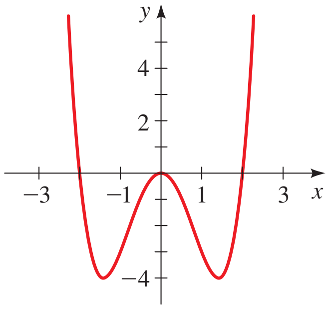



$f(x) = x^2 - 4$




$g(x) = |x^2 - 4|$

**86.** Nos dan la gráfica de $f(x) = x^4 - 4x^2$. Use esta gráfica para trazar la gráfica de $g(x) = |x^4 - 4x^2|$.




**87-88** ■ Trace la gráfica de cada función.

**87.** **(a)** $f(x) = 4x - x^2$ **(b)** $g(x) = |4x - x^2|$

**88.** **(a)** $f(x) = x^3$ **(b)** $g(x) = |x^3|$

## APLICACIONES

**89. Crecimiento en ventas** Las ventas anuales de cierta empresa pueden modelarse con la función $f(t) = 4 + 0.01t^2$, donde $t$ representa los años desde 1900 y $f(t)$ es medida en millones de dólares.

**(a)** ¿Qué operaciones de cambio y reducción deben hacerse en la función $y = t^2$ para obtener la función $y = f(t)$?

**(b)** Suponga que $t$ representa los años desde 2000 en vez de 1900. ¿Qué transformación podría aplicar a la función $y = f(t)$ para lograr esto? Escriba la nueva función $y = g(t)$ que resulta de esta transformación.

**90. Escalas de temperatura que cambia** La temperatura en cierta tarde está modelada por la función

$$C(t) = \tfrac{1}{2}t^2 + 2$$

donde $t$ representa horas después de las 12 del mediodía ($0 \leq t \leq 6$) y $C$ se mide en ºC.

**(a)** ¿Qué operaciones de desplazamiento y contracción deben efectuarse en la función $y = t^2$ para obtener la función $y = c(t)$?

**(b)** Supongamos que se desea medir la temperatura en ºF. ¿Qué transformación tendría que aplicarse a la función $y = C(t)$ para lograr esto? (Use el hecho de que la relación entre grados Celsius y Fahrenheit está dada por $F = \frac{9}{5}C + 32$. Escriba la nueva función $y = F(t)$ que resulta de esta transformación.

## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**91. Sumas de funciones pares e impares** Si $f$ y $g$ son funciones pares ambas, ¿$f + g$ es necesariamente par? Si ambas son impares, ¿su suma es necesariamente impar? ¿Qué se puede decir acerca de la suma si una es impar y una es par? En cada caso, demuestre su respuesta.

**92. Productos de funciones pares e impares** Conteste las mismas preguntas del Ejercicio 91, excepto que esta vez considere el producto de $f$ y $g$ en lugar de la suma.

**93. Funciones de potencia pares e impares** ¿Qué debe ser cierto acerca del entero $n$ si la función

$$f(x) = x^n$$

es una función par? ¿Si es una función impar? ¿Por qué piensa usted que los nombres “par” e “impar” se escogieron para estas propiedades de función?

# 2.6 COMBINACIÓN DE FUNCIONES

Sumas, diferencias, productos y cocientes ▶ Composición de funciones

En esta sección estudiaremos diferentes maneras de combinar funciones para formar nuevas.

## ▼ Sumas, diferencias, productos y cocientes

Dos funciones $f$ y $g$ pueden combinarse para formar nuevas funciones $f + g$, $f - g$, $fg$ y $f/g$ de un modo semejante a como sumamos, restamos, multiplicamos y dividimos números reales. Por ejemplo, definimos la función $f + g$ por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

La suma de $f$ y $g$ está definida por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

El nombre de la nueva función es “$f + g$”. Por lo tanto, este signo + representa la operación de adición de *funciones*, pero el signo + del lado derecho representa adición de los *números* $f(x)$ y $g(x)$.

La nueva función $f + g$ se denomina **suma** de las funciones $f$ y $g$; su valor en $x$ es $f(x) + g(x)$. Desde luego, la suma del lado derecho tiene sentido sólo si $f(x)$ y $g(x)$ están definidas, es decir, si $f$ pertenece al dominio de $f$ y también al dominio de $g$. Por lo tanto, si el dominio de $f$ es $A$ y el dominio de $g$ es $B$, entonces el dominio $f + g$ es la intersección de estos dominios, o sea $A \cap B$. Análogamente, podemos definir la **diferencia** $f - g$, el **producto** $fg$ y el **cociente** $f/g$ de las funciones $f$ y $g$. Sus dominios son $A \cap B$, pero en el caso del cociente debemos recordar no dividir entre 0.