

Muchos de los procesos que se estudian en ciencias físicas y sociales se relacionan con entender la forma en que una cantidad varía con respecto de otra. Hallar una función que describa la dependencia de una cantidad, respecto de otra, se conoce como *modelado*. Por ejemplo, un biólogo observa que el número de bacterias en cierto cultivo aumenta con el tiempo. Él trata de modelar este fenómeno al hallar la función (o regla) precisa que relacione la población de bacterias con el tiempo transcurrido.

En este *Enfoque* aprenderemos a hallar modelos que se puedan construir usando propiedades geométricas o algebraicas del objeto en estudio. Una vez hallado el modelo, lo usaremos para analizar y predecir propiedades del objeto o proceso en estudio.

▼ Modelado con funciones

Empezamos con una situación práctica que ilustra el proceso de modelado.

EJEMPLO 1 | Modelar el volumen de una caja

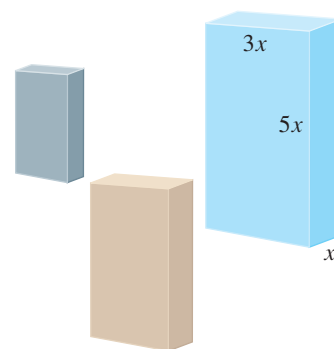
Una compañía productora de cereales para desayuno fabrica cajas para envasar sus productos. Por razones estéticas, la caja debe tener las siguientes proporciones: su ancho es el triple de su profundidad, y su altura es 5 veces su profundidad.

- Encuentre una función que modele el volumen de la caja en términos de su profundidad.
- Encuentre el volumen de la caja si su profundidad es 1.5 pulg.
- ¿Para qué profundidad tendrá un volumen de 90 pulg³?
- ¿Para qué profundidad tendrá un volumen mayor a 60 pulg³?

CONSIDERANDO EL PROBLEMA

Experimentemos con el problema. Si la profundidad es 1 pulgada, entonces el ancho es 3 pulgadas y la altura es 5 pulgadas. Por lo tanto, en este caso, el volumen es $V = 1 \times 3 \times 5 = 15$ pulg.³. La tabla da otros valores. Observe que todas las cajas tienen la misma forma, y a mayor profundidad, mayor volumen.

Profundidad	Volumen
1	$1 \times 3 \times 5 = 15$
2	$2 \times 6 \times 10 = 120$
3	$3 \times 9 \times 15 = 405$
4	$4 \times 12 \times 20 = 96$



SOLUCIÓN

- Para hallar la función que modele el volumen de la caja, usamos los siguientes pasos.

►
 Expresar verbalmente el volumen

Sabemos que el volumen de una caja rectangular es

volumen

=

profundidad

×

ancho

×

altura

►
 Escoger la variable

Hay tres cantidades que varían: ancho, profundidad y altura. Como la función que buscamos depende de la profundidad, hacemos

x = profundidad de la caja

Entonces, expresamos las otras dimensiones de la caja en términos de x .

Verbalmente	En álgebra
Profundidad	x
Ancho	$3x$
Altura	$5x$

►
 Establecer el modelo

El modelo es la función V que da el volumen de la caja en términos de la profundidad x .

volumen

=

profundidad

×

ancho

×

altura

$$V(x) = x \cdot 3x \cdot 5x$$

$$V(x) = 15x^3$$

El volumen de la caja está modelado por la función $V(x) = 15x^3$. La función V está graficada en la Figura 1.

►
 Usar el modelo

Usamos el modelo para contestar las preguntas de las partes (b), (c) y (d).

(b) Si la profundidad es 1.5 pulg., el volumen es $V(1.5) = 15(1.5)^3 = 50.625$ pulg.³.

(c) Necesitamos resolver la ecuación $V(x) = 90$, es decir,

$$15x^3 = 90$$

$$x^3 = 6$$

$$x = \sqrt[3]{6} \approx 1.82 \text{ pulgadas}$$

El volumen es 90 pulg.³ cuando la profundidad es alrededor de 1.82 pulgadas. (También podemos resolver gráficamente esta ecuación, como se ve en la Figura 2.)

(d) Necesitamos resolver la desigualdad $V(x) \geq 60$, es decir,

$$15x^3 \geq 60$$

$$x^3 \geq 4$$

$$x \geq \sqrt[3]{4} \approx 1.59$$

El volumen será mayor de 60 pulg.³ si la profundidad es mayor a 1.59 pulgadas. (También podemos resolver gráficamente esta desigualdad, como se ve en la Figura 3.)

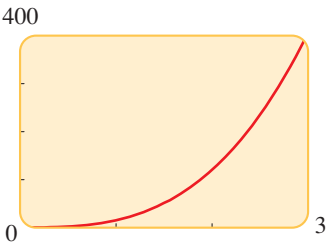


FIGURA 1

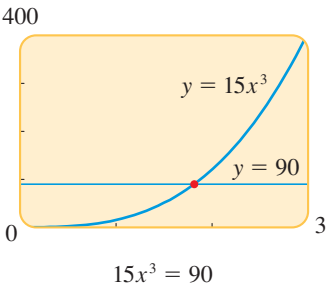


FIGURA 2

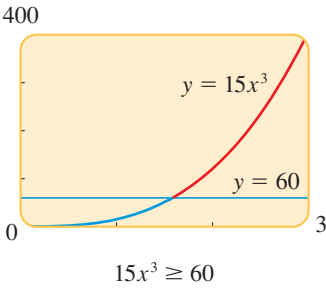


FIGURA 3

Los pasos del Ejemplo 1 son característicos de cómo modelamos con funciones. Están resumidos en el recuadro siguiente.

GUÍA PARA MODELAR CON FUNCIONES

- 1. Expresar verbalmente el problema.** Identificar la cantidad que se desea modelar y expresarla, verbalmente, como función de las otras cantidades del problema.
- 2. Escoger la variable.** Identificar todas las variables que se usan para expresar la función del Paso 1. Asignar un símbolo, por ejemplo x , a una variable, y expresar las otras variables en términos de este símbolo.
- 3. Establecer el modelo.** Expresar la función en el lenguaje de álgebra al escribirla como función de la variable única escogida en el Paso 2.
- 4. Usar el modelo.** Usar la función para contestar las preguntas planteadas en el problema. (Para hallar un máximo o un mínimo, usar los métodos descritos en la Sección 3.3.)

EJEMPLO 2 | Instalar una cerca en un jardín

Una jardinera tiene 140 pies de malla para instalar una cerca en un jardín rectangular de hortalizas.

- Encuentre una función que modele el área del jardín que ella pueda cercar.
- ¿Para qué rango de anchos el área es mayor a 825 pies²?
- ¿Puede ella cercar un jardín con área de 1250 pies²?
- Encuentre las dimensiones del área más grande que ella pueda cercar.

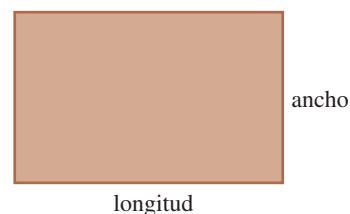
CONSIDERANDO EL PROBLEMA

Si la jardinera instala una cerca alrededor de un lote con 10 pies, entonces la longitud debe ser 60 pies, porque $10 + 10 + 60 + 60 = 140$. Entonces, el área es

$$A = \text{ancho} \times \text{largo} = 10 \cdot 60 = 600 \text{ pies}^2$$

La tabla siguiente muestra varias opciones para cercar el jardín. Vemos que cuando aumenta el ancho, aumenta el área cercada y luego disminuye.

Ancho	Longitud	Área
10	60	600
20	50	1000
30	40	1200
40	30	1200
50	20	1000
60	10	600



SOLUCIÓN

- El modelo que buscamos es una función que da el área que ella pueda cercar.

► Expresar verbalmente el problema

Sabemos que el área del jardín rectangular es

$$\text{área} = \text{ancho} \times \text{longitud}$$

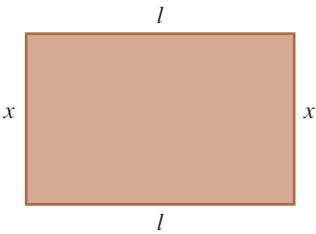


FIGURA 4

► **Escoger la variable**

Hay dos cantidades que varían: ancho y longitud. Como la función que buscamos depende sólo de una variable, hacemos

x = ancho del jardín

Entonces debemos expresar la longitud en términos de x . El perímetro se fija en 140 pies, de modo que la longitud está determinada una vez que escojamos el ancho. Si hacemos que la longitud sea l , como en la Figura 4, entonces $2x + 2l = 140$, de modo que $l = 70 - x$. Resumimos estos datos.

Verbalmente	En álgebra
Ancho	x
Longitud	$70 - x$

► **Establecer el modelo**

El modelo es la función A que da el área del jardín para cualquier ancho x .

área = ancho $\times$ longitud

$A(x) = x(70 - x)$

$A(x) = 70x - x^2$

El área que ella puede cercar está modelada por la función $A(x) = 70x - x^2$.

► **Usar el modelo**

Usamos el modelo para contestar las preguntas de las partes (b)–(d).

- (b) Necesitamos resolver la desigualdad $A(x) \geq 825$. Para resolver gráficamente, graficamos $y = 70x - x^2$ y $y = 825$ en el mismo rectángulo de vista (vea Figura 5). Vemos que $15 \leq x \leq 55$.
- (c) De la Figura 6 vemos que la gráfica de $A(x)$ siempre está debajo de la recta $y = 1250$, de modo que nunca se alcanza un área de 1250 pies².
- (d) Necesitamos hallar en dónde se presenta el máximo valor de la función $A(x) = 70x - x^2$. La función está graficada en la Figura 7. Usando la función **TRACE** de una calculadora graficadora, hallamos que la función alcanza su valor máximo en $x = 35$. Entonces, el área máxima que ella puede cercar es aquella cuando el ancho del jardín es 35 pies y su longitud es $70 - 35 = 35$ pies. El área máxima entonces es $35 \times 35 = 1225$ pies².

Los valores máximos de funciones se estudian en la página 166.

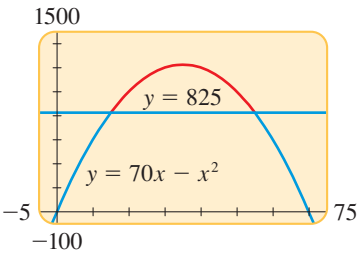


FIGURA 5

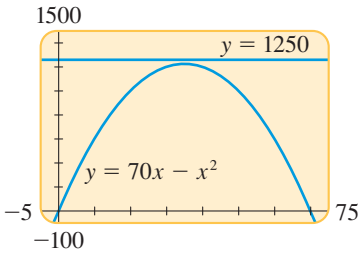


FIGURA 6

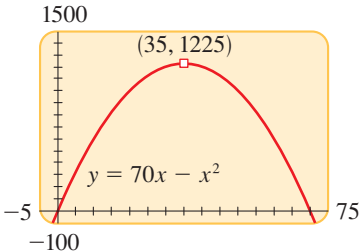


FIGURA 7

EJEMPLO 3 | Reducir al mínimo el metal de una lata

Un fabricante hace una lata que contiene 1 L (litro) de aceite. ¿Qué radio reduce al mínimo la cantidad de metal de la lata?

CONSIDERANDO EL PROBLEMA

Para usar la cantidad mínima de metal, debemos reducir al mínimo el área superficial de la lata, es decir, el área de la tapa, fondo y costados. El área de la tapa y fondo es $2\pi r^2$ y el área de los costados es $2\pi rh$ (vea Figura 8), de modo que el área superficial de la lata es

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

El radio y altura de la lata se pueden escoger de modo que el volumen sea exactamente 1 L, o 1000 cm^3 . Si buscamos un radio pequeño, por ejemplo $r = 3$, entonces la altura debe ser precisamente de la altura suficiente para hacer que el volumen total sea 1000 cm^3 . En otras palabras, debemos tener

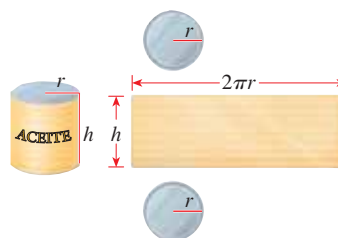
$$\pi(3)^2 h = 1000 \quad \text{El volumen de la lata es } \pi r^2 h$$

$$h = \frac{1000}{9\pi} \approx 35.4 \text{ cm} \quad \text{Despeje } h$$

Ahora que sabemos el radio y la altura, podemos hallar el área superficial de la lata:

$$\text{área superficial} = 2\pi(3)^2 + 2\pi(3)(35.4) \approx 723.8 \text{ cm}^2$$

Si buscamos un radio diferente, podemos hallar la correspondiente altura y área superficial en una forma similar.

**FIGURA 8**

SOLUCIÓN El modelo que buscamos es una función que da el área superficial de la lata.

► Expresar verbalmente el modelo

Sabemos que para una lata cilíndrica

$$\text{área superficial} = \text{área de tapa y fondo} + \text{área costados}$$

► Escoger la variable

Hay dos cantidades que varían: radio y altura. Como la función que buscamos depende del radio, hacemos

$$r = \text{radio de la lata}$$

A continuación, debemos expresar la altura en términos de r . Como el volumen de una lata cilíndrica es $V = \pi r^2 h$ y el volumen debe ser 1000 cm^3 , tenemos

$$\pi r^2 h = 1000 \quad \text{El volumen de la lata es } 1000 \text{ cm}^3$$

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} \quad \text{Despeje } h$$

Ahora podemos expresar el área de la tapa, fondo y costados en términos sólo de r .

Verbalmente	En álgebra
Radio de la lata	r
Altura de la lata	$\frac{1000}{\pi r^2}$
Área de tapa y fondo	$2\pi r^2$
Área de costados ($2\pi rh$)	$2\pi r\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right)$

► Establecer el modelo

El modelo es la función S que da el área superficial de la lata como función del radio r .

área superficial

=

área de tapa y fondo

+

área costados

$$S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right)$$
$$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

► Usar el modelo

Usamos el modelo para hallar el área superficial mínima de la lata. Graficamos S en la Figura 9 y hacemos acercamiento (zoom) en el punto mínimo para hallar que el valor mínimo de S es alrededor de 554 cm^2 y se presenta cuando el radio es de unos 5.4 cm .

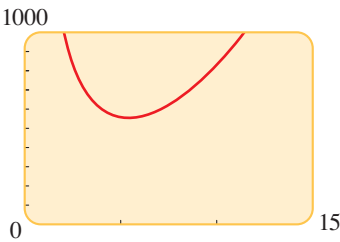


FIGURA 9 $S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$

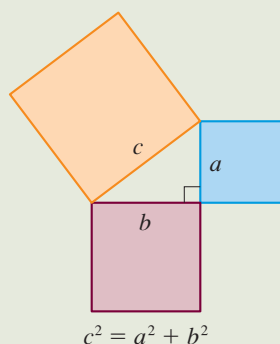
PROBLEMAS

1-18 ■ En estos problemas nos piden hallar una función que modele una situación real. Use los principios de modelar descritos en este *Enfoque* para ayudarse.

- 1. Área** Un lote rectangular para construcción es tres veces más largo que ancho. Encuentre una función que modele su área A en términos de su ancho w .
- 2. Área** Un cartel mide 10 pulgadas más de largo que de ancho. Encuentre una función que modele su área A en términos de su ancho w .
- 3. Volumen** Una caja rectangular tiene base cuadrada. Su altura es la mitad del ancho de la base. Encuentre una función que modele su volumen V en términos de su ancho w .
- 4. Volumen** La altura de un cilindro es cuatro veces su radio. Encuentre una función que modele el volumen V del cilindro en términos de su radio r .
- 5. Área** Un rectángulo tiene un perímetro de 20 pies. Encuentre una función que modele su área A en términos de la longitud x de uno de sus lados.
- 6. Perímetro** Un rectángulo tiene un área de 16 m^2 . Encuentre una función que modele su perímetro P en términos de la longitud x de uno de sus lados.

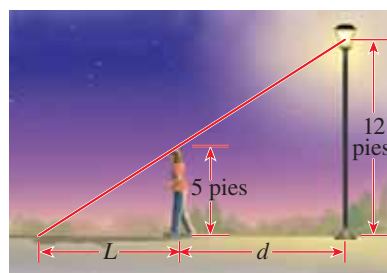
PITÁGORAS (hacia 580-500 a.C.) fundó una escuela en Croton, en el sur de Italia, dedicada al estudio de aritmética, geometría, música y astronomía. Los pitagóricos, como se llamaron, eran una sociedad secreta con peculiares reglas y ritos de iniciación. No escribieron nada y no daban a conocer a nadie lo que habían aprendido del maestro. Aun cuando por ley se prohibía a las mujeres asistir a reuniones públicas, Pitágoras las permitía en su escuela y su más famosa discípula fue Theana (con quien posteriormente se casó).

Según Aristóteles, los pitagóricos estaban convencidos de que "los principios de las matemáticas son los principios de todas las cosas." Su frase era "Todo es un número," con la que querían decir números *enteros*. La sobresaliente aportación de Pitágoras es el teorema que lleva su nombre. En un triángulo recto, el área del cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de las áreas del cuadrado de los otros dos lados.

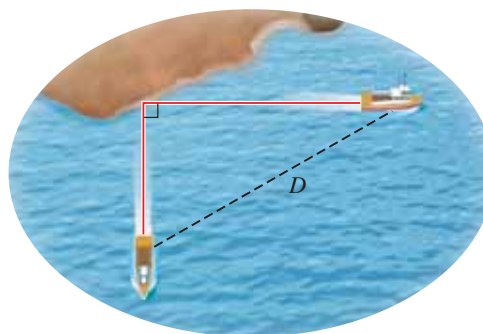


El recíproco del Teorema de Pitágoras también es verdadero; es decir, un triángulo cuyos lados a , b y c satisfacen $a^2 + b^2 = c^2$ es un triángulo recto.

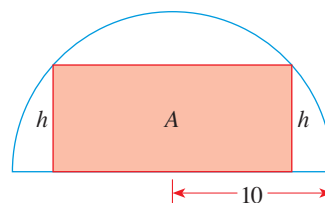
7. **Área** Encuentre una función que modele el área A de un triángulo equivalente en términos de la longitud x de uno de sus lados.
8. **Área** Encuentre una función que modele el área superficial S de un cubo en términos de su volumen V .
9. **Radio** Encuentre una función que modele el radio r de un círculo en términos de su área A .
10. **Área** Encuentre una función que modele el área A de un círculo en términos de su circunferencia C .
11. **Área** Una caja rectangular con volumen de 60 pies³ tiene una base cuadrada. Encuentre una función que modele su área superficial S en términos de la longitud x de un lado de su base.
12. **Longitud** Una mujer de 5 pies de estatura está de pie cerca de un farol que es de 12 pies de altura, como se ve en la figura. Encuentre una función que modele la longitud L de su sombra en términos de su distancia d desde la base del farol.



13. **Distancia** Dos barcos salen de puerto al mismo tiempo. Uno navega al sur a 15 mi/h y, el otro, navega al este a 20 mi/h. Encuentre una función que modele la distancia D entre los barcos en términos del tiempo t (en horas) transcurrido desde su salida.



14. **Producto** La suma de dos números positivos es 60. Encuentre una función que modele su producto P en términos de x , uno de los números.
15. **Área** Un triángulo isósceles tiene un perímetro de 8 cm. Encuentre una función que modele su área A en términos de la longitud de su base b .
16. **Perímetro** Un triángulo rectángulo tiene un cateto del doble de largo que el otro. Encuentre una función que modele el perímetro P en términos de la longitud x del cateto más corto.
17. **Área** Un rectángulo está inscrito en un semicírculo de radio 10, como se muestra en la figura. Encuentre una función que modele el área A del rectángulo en términos de su altura h .



18. **Altura** El volumen de un cono es 100 pulg.³. Encuentre una función que modele la altura h del cono en términos de su radio r .

19-32 ■ En estos problemas pedimos al estudiante hallar una función que modele una situación práctica, y luego usar el modelo para contestar preguntas acerca de la situación. Use las guías de la página 215 para ayudarse.



19. Maximizar un producto Considere el siguiente problema: Hallar dos números cuya suma es 19 y cuyo producto es tan grande como sea posible.

- (a) Experimente con el problema, haciendo una tabla como la siguiente, que muestre el producto de pares diferentes de números que totalizan 19. Con base en la evidencia de la tabla, estime la respuesta al problema.
- (b) Encuentre una función que modele el producto en términos de uno de los dos números.
- (c) Use su modelo para resolver el problema y compárelo con su respuesta a la parte (a).



20. Reducir al mínimo una suma Encuentre dos números positivos cuya suma es 100 y la suma de cuyos cuadrados es mínima.

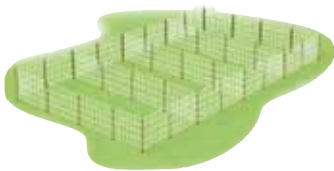
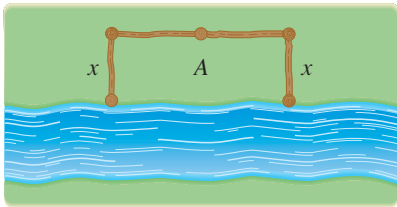


21. Cerca alrededor de un campo Considere el siguiente problema: Un agricultor tiene 2400 pies de malla para cercar y desea cercar un campo rectangular que bordea un río recto. No necesita cerca a lo largo del río (vea la figura). ¿Cuáles son las dimensiones del campo de área máxima que él puede cercar?

- (a) Experimente con el problema, trazando varios diagramas que ilustren la situación. Calcule el área de cada configuración y use sus resultados para estimar las dimensiones del campo más grande posible.

Primer número	Segundo número	Producto
1	18	18
2	17	34
3	16	48
⋮	⋮	⋮

- (b) Encuentre una función que modele el área del campo en términos de uno de sus lados.
- (c) Use su modelo para resolver el problema, y compárelo con su respuesta a la parte (a).



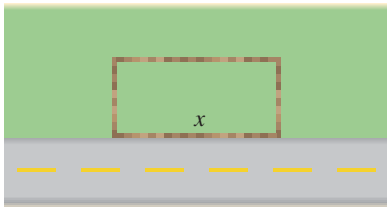
22. Dividir un corral Un ranchero con 750 pies de malla para cercar desea encerrar un área rectangular, y luego dividirla en cuatro corrales con cercas paralelas a un lado del rectángulo (vea la figura).

- (a) Encuentre una función que modele el área total de los cuatro corrales.
- (b) Encuentre el área total máxima posible de los cuatro corrales.



23. Cercar un terreno para jardín El dueño de una propiedad desea cercar un terreno para jardín adyacente a un camino, como se ve en la figura. La cerca junto al camino debe ser más robusta y cuesta \$5 por pie, pero la otra cerca cuesta sólo \$3 por pie. El jardín ha de tener un área de 1200 pies².

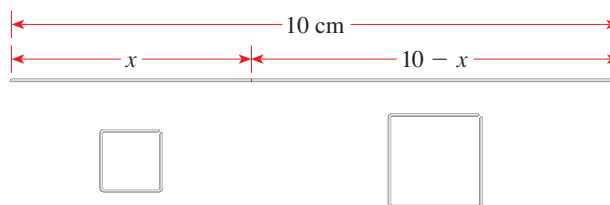
- (a) Encuentre una función que modele el costo de cercar el jardín.
- (b) Encuentre las dimensiones del jardín que reduzcan al mínimo el costo de cercar el jardín.
- (c) Si el dueño tiene a lo sumo \$600 para gastar en la cerca, encuentre el rango de longitudes que puede cercar a lo largo del camino.





24. Maximizar un área Un alambre de 10 cm de largo se corta en dos partes, una de longitud x y la otra de longitud $10 - x$, como se ve en la figura. Cada pieza se dobla en forma de cuadrado.

- (a) Encuentre una función que modele el área total encerrada por los dos cuadrados.
(b) Encuentre el valor de x que reduzca al mínimo el área total de los dos cuadrados.



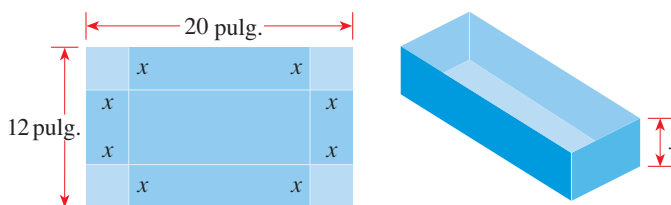
25. Luz de una ventana Una ventana normanda tiene la forma de un rectángulo rematado por un semicírculo, como se muestra en la figura de la izquierda. Se ha de construir una ventana normanda con perímetro de 30 pies.

- (a) Encuentre una función que modele el área de la ventana.
(b) Encuentre las dimensiones de la ventana que deje pasar la máxima cantidad de luz.



26. Volumen de una caja Se ha de construir una caja abierta por arriba, de un trozo rectangular de cartón con dimensiones de 12 pulgadas por 20 pulgadas, cortando cuadrados iguales de lado x en cada esquina y luego doblando hacia arriba los lados (vea la figura).

- (a) Encuentre una función que modele el volumen de la caja.
(b) Encuentre los valores de x para los cuales el volumen es mayor a 200 pulg.³.
(c) Encuentre el máximo volumen que tal caja pueda tener.

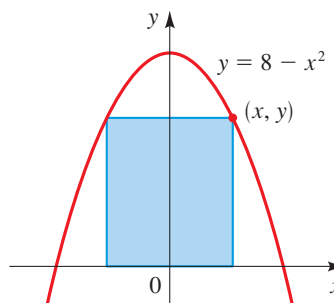


27. Área de una caja Una caja abierta con base cuadrada ha de tener un volumen de 12 pies³.

- (a) Encuentre una función que modele el área superficial de la caja.
(b) Encuentre las dimensiones de caja que reduzcan al mínimo la cantidad de material utilizado.



28. Rectángulo inscrito Encuentre las dimensiones que den la máxima área para el rectángulo que se muestra en la figura. Su base está sobre el eje x y los otros dos vértices están arriba del eje x , sobre la parábola $y = 8 - x^2$.



29. Reducir costos al mínimo Un ranchero desea construir un corral rectangular con un área de 100 m².

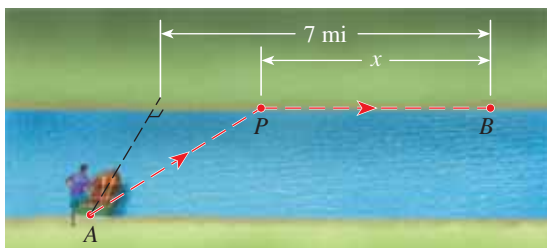
- (a) Encuentre una función que modele la longitud de la cerca requerida.
(b) Encuentre las dimensiones del corral que requieran la mínima cantidad de malla para cerca.



30. Reducir al mínimo el tiempo Un hombre está de pie en el punto A en la orilla de un río recto, de 2 millas de ancho. Para llegar al punto B , que está a 7 millas aguas abajo en la orilla opuesta, él rema en su bote al punto P en la orilla opuesta y luego camina la distancia x restante hasta B , como se muestra en la figura. Ahora ya puede remar a una velocidad de 2 millas/h y caminar a una velocidad de 5 millas/h.

(a) Encuentre una función que modele el tiempo necesario para el viaje.

(b) ¿Dónde debe desembarcar para llegar a B tan pronto como sea posible?



31. Vuelo de pájaro Se suelta un ave desde el punto A en una isla, a 5 millas del punto B más cercano en una orilla recta. El ave vuela al punto C en la orilla y luego vuela a lo largo de la orilla a su zona de anidar D (vea la figura). Suponga que el ave requiere 10 kcal/milla de energía para volar sobre tierra y 14 kcal/milla para volar sobre el agua.

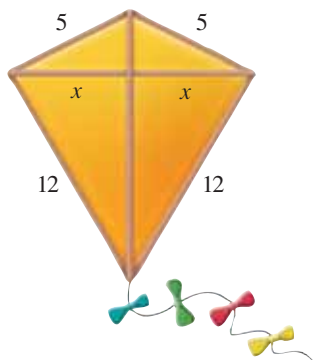
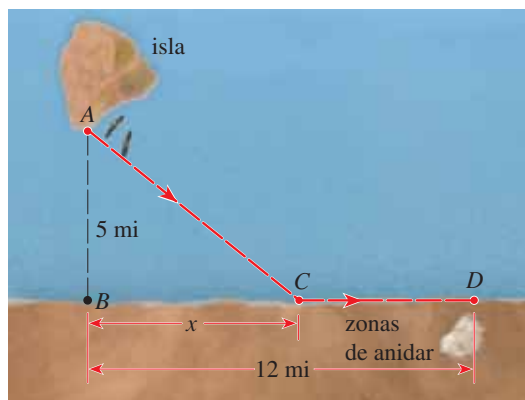
(a) Use el dato de que

$$\text{energía empleada} = \text{energía por milla} \times \text{millas de vuelo}$$

para demostrar que el total de energía empleada por el ave está modelada por la función

$$E(x) = 14\sqrt{x^2 + 25} + 10(12 - x)$$

(b) Si el ave instintivamente escoge una trayectoria que reduce al mínimo su gasto de energía, ¿a qué punto vuela?



32. Área de una cometa El bastidor de una cometa se ha de construir con seis piezas de madera. Las cuatro piezas que forman su borde han sido cortadas a las longitudes indicadas en la figura. Sea x como se muestra en la figura.

(a) Demuestre que el área de la cometa está dada por la función

$$A(x) = x(\sqrt{25 - x^2} + \sqrt{144 - x^2})$$

(b) ¿Cuál debe ser la longitud de los dos travesaños para hacer máxima el área de la cometa?