71. (a) Demuestre que $2i$ y $1 - i$ son soluciones de la ecuación

$$x^2 - (1 + i)x + (2 + 2i) = 0$$

pero que sus complejos conjugados $-2i$ y $1 + i$ no lo son.

(b) Explique por qué el resultado de la parte (a) no viola el Teorema de Ceros Conjugados.

72. (a) Encuentre la función polinomial con coeficientes *reales* del grado más bajo posible para el que i y $1 + i$ son ceros y en el que el coeficiente de la potencia más alta es 1.

(b) Encuentre la función polinomial con coeficientes *complejos* del grado más pequeño posible para el que i y $1 + i$ son ceros y en el que el coeficiente de la potencia más alta es 1.

DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

73. Polinomios de grado impar El Teorema de Ceros Conjugados dice que los ceros complejos de una función polinomial con coeficientes reales se presentan en pares conjugados complejos. Explique la forma en que este hecho demuestra que una función polinomial con coeficientes reales y grado impar tiene al menos un cero real.

74. Raíces de la unidad Hay dos raíces cuadradas de 1, es decir, 1 y -1. Éstas son las soluciones de $x^2 = 1$. Las raíces cuartas de 1 son las soluciones de la ecuación $x^4 = 1$ o $x^4 - 1 = 0$. ¿Cuántas raíces cuartas de 1 hay? Encuéntrelas. Las raíces cúbicas de 1 son las soluciones de la ecuación $x^3 = 1$ o $x^3 - 1 = 0$. ¿Cuántas raíces cúbicas de 1 hay? Encuéntrelas. ¿Cómo hallaría usted las raíces sextas de 1? ¿Cuántas raíces hay? Haga una conjetura acerca del número de las n-raíces de 1.

3.7 FUNCIONES RACIONALES

Una función racional es una función de la forma

$$r(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P y Q son funciones polinomiales. Suponemos que $P(x)$ y $Q(x)$ no tienen factor en común. Aun cuando las funciones racionales se construyen a partir de polinomios, sus gráficas tienen un aspecto muy diferente del de las gráficas de funciones polinomiales.

▼ Funciones racionales y asíntotas

Los dominios de expresiones racionales se estudian en la Sección 1.4.

El *dominio* de una función racional está formado por todos los números reales x excepto aquellos para los cuales el denominador es cero. Al hacer la gráfica de una función racional, debemos poner especial atención al comportamiento de la gráfica cerca de esos valores x. Empezamos por graficar una función racional muy sencilla.

EJEMPLO 1 | Una función racional sencilla

Grafique la función racional $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y exprese el dominio y rango.

SOLUCIÓN La función f no está definida para $x = 0$. Las tablas siguientes muestran que cuando x es cercana a cero, el valor de $|f(x)|$ es grande, y cuanto más se acerque x a cero, más grande se hace $|f(x)|$.

Para números positivos reales,

$$\frac{1}{\text{NÚMERO GRANDE}} = \text{número pequeño}$$

$$\frac{1}{\text{número pequeño}} = \text{NÚMERO GRANDE}$$

x	$f(x)$
-0.1	-10
-0.01	-100
-0.00001	$-100,000$

Se aproxima a 0^- | Se aproxima a $-\infty$

x	$f(x)$
0.1	10
0.01	100
0.00001	100,000

Se aproxima a 0^+ | Se aproxima a ∞

Describimos este comportamiento en palabras y en símbolos como sigue. La primera tabla muestra que cuando x se aproxima a 0 por la izquierda, los valores de $y = f(x)$ decrecen sin límite. En símbolos

$$f(x) \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to 0^- \qquad \text{“}y \text{ se aproxima al infinito negativo cuando } x \text{ se aproxima a 0 por la izquierda”}$$

La segunda tabla muestra que cuando x se aproxima a 0 por la derecha, los valores de $f(x)$ aumentan sin límite. En símbolos,

$$f(x) \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to 0^+ \qquad \text{“}y \text{ se aproxima al infinito cuando } x \text{ se aproxima a 0 por la derecha”}$$

Las dos tablas siguientes muestran cómo cambia $f(x)$ cuando $|x|$ se hace grande.

x	$f(x)$
-10	-0.1
-100	-0.01
$-100,000$	-0.00001

x	$f(x)$
10	0.1
100	0.01
100,000	0.00001

Se aproxima a $-\infty$ Se aproxima a 0 Se aproxima a ∞ Se aproxima a 0

Estas tablas muestran que cuando $|x|$ se hace grande, el valor de $f(x)$ se aproxima y está cerca de cero. Describimos esta situación simbólicamente al escribir.

$$f(x) \to 0 \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty \qquad \text{y} \qquad f(x) \to 0 \quad \text{cuando} \quad x \to \infty$$

Usando la información de estas tablas y localizando unos cuantos puntos adicionales, obtenemos la gráfica de la Figura 1.

x	$f(x) = \frac{1}{x}$
-2	$-\frac{1}{2}$
-1	-1
$-\frac{1}{2}$	-2
$\frac{1}{2}$	2
1	1
2	$\frac{1}{2}$

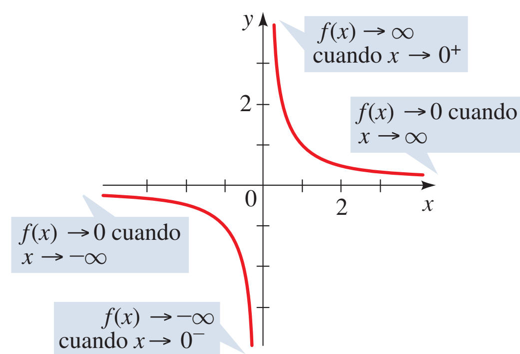


FIGURA 1
$f(x) = \frac{1}{x}$

La función f está definida para todos los valores de x que no sean 0, de modo que el dominio $\{x \mid x \neq 0\}$. De la gráfica vemos que el rango es $\{y \mid y \neq 0\}$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **7**

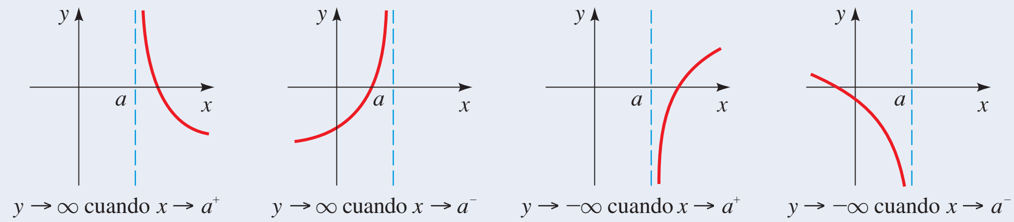
En el Ejemplo 1 utilizamos la siguiente notación de flechas.

Símbolo	Significado
$x \to a^-$	x se aproxima a a por la izquierda
$x \to a^+$	x se aproxima a a por la derecha
$x \to -\infty$	x se va al infinito negativo; es decir, x decrece sin límite
$x \to \infty$	x se va al infinito; es decir, x aumenta sin límite

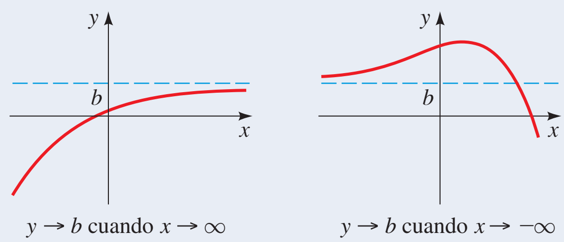
La recta $x = 0$ se denomina *asíntota vertical* de la gráfica de la Figura 1, y la recta $y = 0$ es una *asíntota horizontal*. Informalmente hablando, una asíntota de una función es una recta a la que la gráfica de la función se acerca cada vez más cuando nos movemos a lo largo de la recta.

DEFINICIÓN DE ASÍNTOTAS VERTICALES Y HORIZONTALES

1. La recta $x = a$ es una **asíntota vertical** de la función $y = f(x)$ si y se aproxima a $\pm\infty$ cuando x se aproxima a a por la derecha o por la izquierda.



2. La recta $y = b$ es una **asíntota horizontal** de la función $y = f(x)$ si y se aproxima a b cuando x se aproxima a $\pm\infty$.



Una función racional tiene asíntotas verticales donde la función no está definida, es decir, donde el denominador es cero.

Transformaciones de $y = 1/x$

Una función racional de la forma

$$r(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

puede graficarse al desplazar, estirar y/o reflejar la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$ mostrada en la Figura 1, usando las transformaciones estudiadas en la Sección 2.5. (Tales funciones se denominan *transformaciones fraccionarias lineales.*)

EJEMPLO 2 | Usar transformaciones para graficar funciones racionales

Grafique cada función racional, y exprese el dominio y rango.

(a) $r(x) = \dfrac{2}{x - 3}$ **(b)** $s(x) = \dfrac{3x + 5}{x + 2}$

SOLUCIÓN

(a) Sea $f(x) = \frac{1}{x}$. Entonces podemos expresar r en términos de f como sigue:

$$\begin{aligned} r(x) &= \frac{2}{x-3} \\ &= 2\left(\frac{1}{x-3}\right) && \text{Factorice 2} \\ &= 2(f(x-3)) && \text{Porque } f(x) = \tfrac{1}{x} \end{aligned}$$

De esta forma vemos que la gráfica de r se obtiene de la gráfica de f al desplazar 3 unidades a la derecha y alargar verticalmente en un factor de 2. Entonces, r tiene asíntota vertical $x = 3$ y asíntota horizontal $y = 0$. La gráfica de r se muestra en la Figura 2.

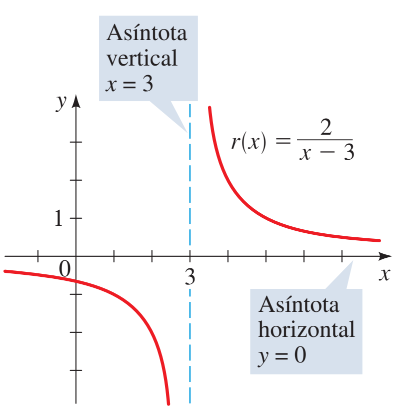


FIGURA 2

La función r está definida para toda x que no sea 3, por lo que el dominio es $\{x \mid x \neq 3\}$. De la gráfica vemos que el rango es $\{y \mid y \neq 0\}$.

$$\begin{array}{r} 3 \\ x + 2\,\overline{)\,3x + 5} \\ \underline{3x + 6} \\ -1 \end{array}$$

(b) Usando división larga (vea al margen), obtenemos $s(x) = 3 - \frac{1}{x+2}$. Entonces, podemos expresar s en términos de f como sigue:

$$\begin{aligned} s(x) &= 3 - \frac{1}{x+2} \\ &= -\frac{1}{x+2} + 3 && \text{Reacomodando términos} \\ &= -f(x+2) + 3 && \text{Ya que } f(x) = \tfrac{1}{x} \end{aligned}$$

De esta forma vemos que la gráfica de s se obtiene de la gráfica de f al desplazar 2 unidades a la izquierda, reflejar en el eje x y desplazar hacia arriba 3 unidades. Entonces, s tiene una asíntota vertical $x = -2$ y asíntota horizontal $y = 3$. La gráfica de s se muestra en la Figura 3.

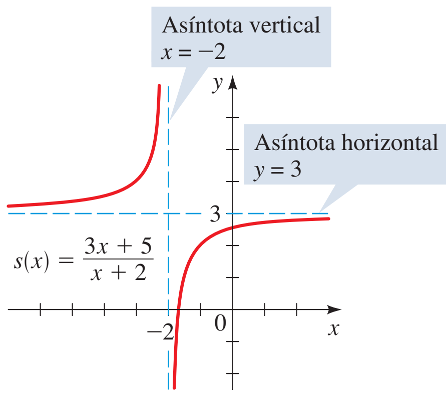


FIGURA 3

La función s está definida para toda x que no sea -2, de modo que el dominio es $\{x \mid x \neq -2\}$. De la gráfica vemos que el rango es $\{y \mid y \neq 3\}$.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **35** Y **37**

▼ Asíntotas de funciones racionales

Los métodos del Ejemplo 2 se cumplen sólo para funciones racionales simples. Para graficar unas más complicadas, necesitamos dar una mirada más rigurosa al comportamiento de una función racional cerca de sus asíntotas vertical y horizontal.

EJEMPLO 3 | Asíntotas de una función racional

Grafique $r(x) = \dfrac{2x^2 - 4x + 5}{x^2 - 2x + 1}$ y exprese el dominio y rango.

SOLUCIÓN

Asíntota vertical: Primero factorizamos el denominador

$$r(x) = \frac{2x^2 - 4x + 5}{(x - 1)^2}$$

La recta $x = 1$ es una asíntota vertical porque el denominador de r es cero cuando $x = 1$.

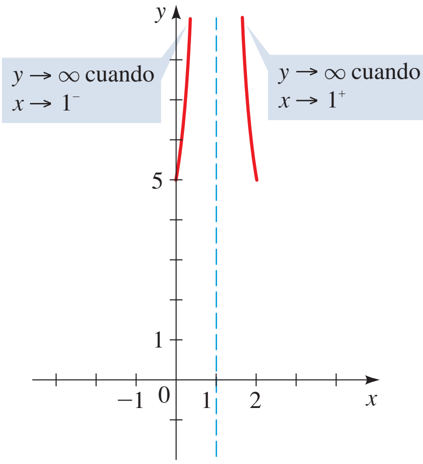


FIGURA 4

Para ver cuál es el aspecto de la gráfica de f cerca de la asíntota vertical, hacemos tablas de valores para valores x a la izquierda y derecha de 1. De las tablas mostradas a continuación vemos que

$$y \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to 1^- \qquad \text{y} \qquad y \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to 1^+$$

$x \to 1^-$

x	y
0	5
0.5	14
0.9	302
0.99	30,002

Se aproxima a 1^- — Se aproxima a ∞

$x \to 1^+$

x	y
2	5
1.5	14
1.1	302
1.01	30,002

Se aproxima a 1^+ — Se aproxima a ∞

Entonces, cerca de la asíntota vertical $x = 1$, la gráfica de r tiene la forma mostrada en la Figura 4.

Asíntota horizontal: La asíntota horizontal es el valor que alcanza y cuando $x \to \pm\infty$. Para ayudarnos a hallar este valor, dividimos numerador y denominador entre x^2, la potencia superior de x que aparece en la expresión:

$$y = \frac{2x^2 - 4x + 5}{x^2 - 2x + 1} \cdot \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{2 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

Las expresiones fraccionarias $\frac{4}{x}$, $\frac{5}{x^2}$, $\frac{2}{x}$ y $\frac{1}{x^2}$ se aproximan todas a 0 cuando $x \to \pm\infty$ (vea Ejercicio 83, página 12). Por lo tanto, cuando $x \to \pm\infty$, tenemos

Estos términos se aproximan a 0

$$y = \frac{2 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} \longrightarrow \frac{2 - 0 + 0}{1 - 0 + 0} = 2$$

Estos términos se aproximan a 0

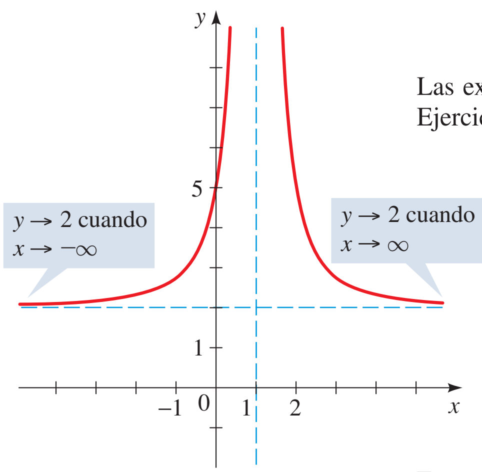


FIGURA 5

$$r(x) = \frac{2x^2 - 4x + 5}{x^2 - 2x + 1}$$

Entonces, la asíntota horizontal es la recta $y = 2$.

Como la gráfica debe aproximarse a la asíntota horizontal, podemos completarla como en la Figura 5.

Dominio y rango: La función r está definida para todos los valores de x que no sean 1, de modo que el dominio es $\{x \mid x \neq 1\}$. De la gráfica vemos que el rango es $\{y \mid y > 2\}$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **45**

Del Ejemplo 3 vemos que la asíntota horizontal está determinada por los coeficientes principales del numerador y denominador, porque después de dividir todo entre x^2 (la potencia superior de x), todos los otros términos se aproximan a cero. En general, si $r(x) = P(x)/Q(x)$ y los grados de P y Q son iguales (ambos n, por ejemplo), entonces dividir entre x^n tanto numerador como denominador muestra que la asíntota horizontal es

$$y = \frac{\text{coeficiente principal de } P}{\text{coeficiente principal de } Q}$$

En el siguiente recuadro se resume el procedimiento para hallar asíntotas.

HALLAR ASÍNTOTAS DE FUNCIONES RACIONALES

Sea r la función racional

$$r(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

1. Las asíntotas verticales de r son las rectas $x = a$, donde a es un cero del denominador.

2. **(a)** Si $n < m$, entonces r tiene asíntota horizontal $y = 0$.

(b) Si $n = m$, entonces r tiene asíntota horizontal $y = \dfrac{a_n}{b_m}$.

(c) Si $n > m$, entonces r no tiene asíntota horizontal.

EJEMPLO 4 | Asíntotas de una función racional

Encuentre las asíntotas vertical y horizontal de $r(x) = \dfrac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 + 3x - 2}$.

SOLUCIÓN

Asíntotas verticales: Primero factorizamos

$$r(x) = \frac{3x^2 - 2x - 1}{(2x - 1)(x + 2)}$$

Este factor es 0 cuando $x = \frac{1}{2}$

Este factor es 0 cuando $x = -2$

Las asíntotas verticales son las rectas $x = \frac{1}{2}$ y $x = -2$.

Asíntota horizontal: Los grados del numerador y denominador son iguales, y

$$\frac{\text{coeficiente principal de numerador}}{\text{coeficiente principal de denominador}} = \frac{3}{2}$$

Entonces, la asíntota horizontal es la recta $y = \frac{3}{2}$.

Para confirmar nuestros resultados, graficamos r usando una calculadora graficadora (vea Figura 6).

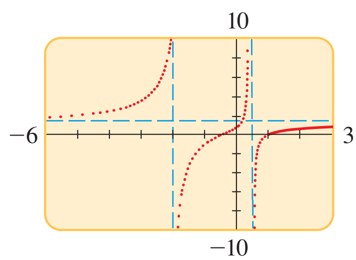


FIGURA 6

$r(x) = \dfrac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 + 3x - 2}$

La gráfica está trazada usando modo de puntos para evitar líneas extrañas.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **23** Y **25**

Gráficas de funciones racionales

Hemos visto que las asíntotas son importantes cuando se grafican funciones racionales. En general, usamos las siguientes guías para graficar funciones racionales.

Una fracción es 0 si y sólo si su numerador es 0.

TRAZADO DE GRÁFICAS DE FUNCIONES RACIONALES

1. **Factorizar.** Factorice el numerador y denominador.
2. **Puntos de intersección.** Encuentre los puntos de intersección x al determinar los ceros del numerador, así como los puntos de intersección y a partir del valor de la función en $x = 0$.
3. **Asíntotas verticales.** Encuentre las asíntotas verticales al determinar los ceros del denominador y, a continuación, vea si $y \to \infty$ o $y \to -\infty$ en cada lado de cada asíntota vertical mediante el uso de valores de prueba.
4. **Asíntota horizontal.** Encuentre la asíntota horizontal (si la hay) usando el procedimiento descrito en el recuadro de la página 282.
5. **Trazar la gráfica.** Grafique la información dada por los primeros cuatro pasos. A continuación localice tantos puntos adicionales como sea necesario, para llenar el resto de la gráfica de la función.

EJEMPLO 5 | Graficar una función racional

Grafique $r(x) = \dfrac{2x^2 + 7x - 4}{x^2 + x - 2}$ y exprese el dominio y rango.

SOLUCIÓN Factorizamos el numerador y el denominador, encontramos los puntos de intersección y asíntotas, y trazamos la gráfica.

Factorice: $y = \dfrac{(2x - 1)(x + 4)}{(x - 1)(x + 2)}$

Puntos de intersección x: Los puntos de intersección x son los ceros del numerador, $x = \frac{1}{2}$ y $x = -4$.

Puntos de intersección y: Para hallar el punto de intersección y, sustituimos $x = 0$ en la forma original de la función.

$$r(0) = \frac{2(0)^2 + 7(0) - 4}{(0)2 + (0) - 2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

El punto de intersección y es 2.

Asíntotas verticales: Las asíntotas verticales se presentan donde el denominador es 0, es decir, donde la función no está definida. De la forma factorizada vemos que las asíntotas verticales son las rectas $x = 1$ y $x = -2$.

Cuando escojamos valores de prueba, debemos asegurarnos que no haya un punto de intersección x entre el punto de prueba y la asíntota vertical.

Comportamiento cerca de asíntotas verticales: Necesitamos saber si $y \to \infty$ o $y \to -\infty$ en cada lado de cada asíntota vertical. Para determinar el signo de y para valores x cerca de las asíntotas verticales, usamos valores de prueba. Por ejemplo, cuando $x \to 1^-$, usamos un valor de prueba cercano y a la izquierda de 1 ($x = 0.9$, por ejemplo) para comprobar si y es positiva o negativa a la izquierda de $x = 1$.

$$y = \frac{(2(0.9) - 1)((0.9) + 4)}{((0.9) - 1)((0.9) + 2)} \qquad \text{cuyo signo es} \qquad \frac{(+)(+)}{(-)(+)} \qquad \text{(negativo)}$$

Entonces, $y \to -\infty$ cuando $x \to 1^-$. Por otra parte, cuando $x \to 1^+$, usamos un valor de prueba cercano y a la derecha de 1 ($x = 1.1$, por ejemplo), para obtener

$$y = \frac{(2(1.1) - 1)((1.1) + 4)}{((1.1) - 1)((1.1) + 2)} \qquad \text{cuyo signo es} \qquad \frac{(+)(+)}{(+)(+)} \qquad \text{(positivo)}$$

Entonces, $y \to \infty$ cuando $x \to 1^+$. Las otras entradas de la tabla siguiente se calculan de manera semejante.

Cuando $x \to$	-2^-	-2^+	1^-	1^+
el signo de $y = \dfrac{(2x - 1)(x + 4)}{(x - 1)(x + 2)}$ es	$\frac{(-)(+)}{(-)(-)}$	$\frac{(-)(+)}{(-)(+)}$	$\frac{(+)(+)}{(-)(+)}$	$\frac{(+)(+)}{(+)(+)}$
entonces $y \to$	$-\infty$	∞	$-\infty$	∞

LAS MATEMÁTICAS EN EL MUNDO MODERNO

Códigos indescifrables

Si usted lee novelas de espías, sabe de códigos secretos y cómo es que el héroe "descifra" el código. Hoy en día, los códigos secretos tienen un uso mucho más común. La mayor parte de la información almacenada en computadoras está codificada para evitar su uso por personas no autorizadas. Por ejemplo, los registros bancarios, los historiales médicos, los datos escolares y otros similares están codificados. Un sinnúmero de teléfonos celulares e inalámbricos codifican la señal que lleva la voz para que nadie más pueda oírla. Por fortuna, por los recientes avances en matemáticas, los códigos de la actualidad son "indescifrables".

Los códigos modernos están basados en un principio sencillo: factorizar es mucho más difícil que multiplicar. Por ejemplo, trate de multiplicar 78 y 93; ahora trate de factorizar 9991. Lleva tiempo factorizar 9991 porque es un producto de los dos números primos 97×103, de manera que para factorizarlos tenemos que hallar uno de estos primos. Ahora imagine tratar de factorizar un número *N* que es producto de dos primos *p* y *q*, cada uno de ellos de 200 dígitos de largo. Hasta las computadoras más potentes tardarían millones de años en factorizar ese número. Pero la misma computadora tardaría menos de un segundo en multiplicar esos dos números. Este dato fue utilizado por Ron Rivest, Adi Shamir y Leonard Adleman en la década de 1970 para idear el código RSA. El código de ellos utiliza un número extremadamente grande para codificar un mensaje pero exige que conozcamos sus factores para descifrarlo. Como se puede ver, ese código es particularmente indescifrable.

El código RSA es un ejemplo de código de "cifrado público clave". En dichos códigos, cualquiera puede cifrar un mensaje usando un procedimiento conocido públicamente basado en *N*, pero para decodificar el mensaje deben saber *p* y *q*, los factores de *N*. Cuando fue inventado el código RSA, se pensó que un número de 80 dígitos cuidadosamente seleccionado daría un código indescifrable, pero es curioso que recientes avances en el estudio de la factorización hayan hecho necesarios números mucho más grandes.

Asíntota horizontal: Los grados del numerador y el denominador son iguales y

$$\frac{\text{coeficiente principal del numerador}}{\text{coeficiente principal del denominador}} = \frac{2}{1} = 2$$

Entonces, la asíntota horizontal es la recta $y = 2$.

Gráfica: Usamos la información que hemos encontrado, junto con algunos valores adicionales, para trazar la gráfica de la Figura 7.

x	y
-6	0.93
-3	-1.75
-1	4.50
1.5	6.29
2	4.50
3	3.50

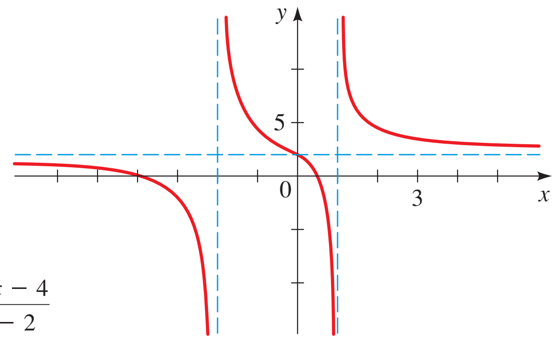


FIGURA 7

$$r(x) = \frac{2x^2 + 7x - 4}{x^2 + x - 2}$$

Dominio y rango: El dominio es $\{x \mid x \neq 1, x \neq -2\}$. De la gráfica vemos que el rango es todos los números reales.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **53**

EJEMPLO 6 | Gráfica de una función racional

Grafique $r(x) = \dfrac{5x + 21}{x^2 + 10x + 25}$ y exprese el dominio y rango.

SOLUCIÓN

Factorice: $y = \dfrac{5x + 21}{(x + 5)^2}$

Punto de intersección *x*: $-\dfrac{21}{5}$, de $5x + 21 = 0$

Punto de intersección *y*: $\dfrac{21}{25}$, porque $r(0) = \dfrac{5 \cdot 0 + 21}{0^2 + 10 \cdot 0 + 25}$

$$= \frac{21}{25}$$

Asíntota vertical: $x = -5$, de los ceros del denominador

Comportamiento cerca de asíntota vertical:

Cuando $x \to$	-5^-	-5^+
el signo de $y = \dfrac{5x + 21}{(x + 5)^2}$ es	$\dfrac{(-)}{(-)(-)}$	$\dfrac{(-)}{(+)(+)}$
entonces $y \to$	$-\infty$	$-\infty$

Asíntota horizontal: $y = 0$, porque el grado del numerador es menor que el grado del denominador

Gráfica: Usamos la información que hemos encontrado, junto con algunos valores adicionales, para trazar la gráfica de la Figura 8.

x	y
-15	-0.5
-10	-1.2
-3	1.5
-1	1.0
3	0.6
5	0.5
10	0.3

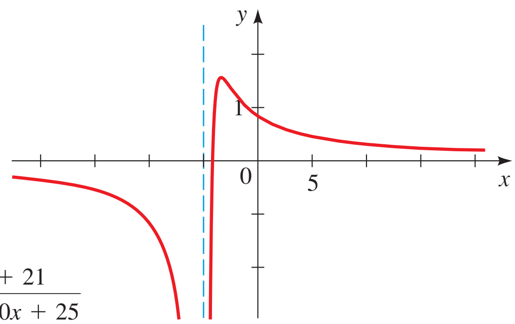


FIGURA 8

$r(x) = \dfrac{5x + 21}{x^2 + 10x + 25}$

Dominio y rango: El dominio es $\{x \mid x \neq -5\}$. De la gráfica vemos que el rango es aproximadamente el intervalo $(-\infty, 1.5]$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **55**

De la gráfica de la Figura 8 vemos que, al contrario de una mala interpretación, una gráfica puede cruzar una asíntota horizontal. La gráfica de la Figura 8 cruza el eje x (la asíntota horizontal) desde abajo, alcanza un valor máximo cerca de $x = -3$, y luego se aproxima al eje x desde arriba cuando $x \to \infty$.

EJEMPLO 7 | Gráfica de una función racional

Grafique la función racional $r(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{2x^2 + 4x}$.

SOLUCIÓN

Factorice: $y = \dfrac{(x + 1)(x - 4)}{2x(x + 2)}$

Puntos de intersección x: -1 y 4, de $x + 1 = 0$ y $x - 4 = 0$

Punto de intersección y: Ninguno, porque $r(0)$ no está definido

Asíntotas verticales: $x = 0$ y $x = -2$, de los ceros del denominador

Comportamiento cerca de asíntotas verticales:

Cuando $x \to$	-2^-	-2^+	0^-	0^+
el signo de $y = \dfrac{(x + 1)(x - 4)}{2x(x + 2)}$ es	$\dfrac{(-)(-)}{(-)(-)}$	$\dfrac{(-)(-)}{(-)(+)}$	$\dfrac{(+)(-)}{(-)(+)}$	$\dfrac{(+)(-)}{(+)(+)}$
entonces $y \to$	∞	$-\infty$	∞	$-\infty$

Asíntota horizontal: $y = \frac{1}{2}$, porque el grado del numerador y el grado del denominador son iguales y

$$\frac{\text{coeficiente principal del numerador}}{\text{coeficiente principal del denominador}} = \frac{1}{2}$$

Gráfica: Usamos la información que hemos encontrado, junto con algunos valores adicionales, para trazar la gráfica de la Figura 9

x	y
-3	2.33
-2.5	3.90
-0.5	1.50
1	-1.00
3	-0.13
5	0.09

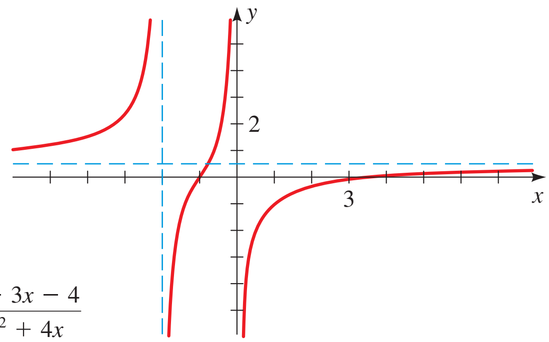


FIGURA 9

$r(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{2x^2 + 4x}$

Dominio y rango: El dominio es $\{x \mid x \neq 0, x \neq -2\}$. De la gráfica vemos que el rango es todos los números reales.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **57**

Asíntotas diagonales y comportamiento final

Si $r(x) = P(x)/Q(x)$ es una función racional en la que el grado del numerador es uno más que el grado del denominador, podemos usar el Algoritmo de división para expresar la función en la forma

$$r(x) = ax + b + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

donde el grado de R es menor que el grado de Q y $a \neq 0$. Esto significa que cuando $x \to \pm\infty$, $R(x)/Q(x) \to 0$, de modo que para valores grandes de $|x|$ la gráfica de $y = r(x)$ se aproxima a la gráfica de $y = ax + b$. En esta situación decimos que $y = ax + b$ es una **asíntota diagonal**, o una **asíntota oblicua**.

EJEMPLO 8 | Una función racional con una asíntota diagonal

Grafique la función racional $r(x) = \dfrac{x^2 - 4x - 5}{x - 3}$.

SOLUCIÓN

Factorice: $y = \dfrac{(x+1)(x-5)}{x-3}$

Puntos de intersección *x*: -1 y 5, de $x + 1 = 0$ y $x - 5 = 0$

Puntos de intersección *y*: $\frac{5}{3}$, porque $r(0) = \dfrac{0^2 - 4 \cdot 0 - 5}{0 - 3} = \dfrac{5}{3}$

Asíntota horizontal: Ninguna, porque el grado del numerador es mayor que el grado del denominador

Asíntota vertical: $x = 3$, del cero del denominador

Comportamiento cerca de asíntota vertical: $y \to \infty$ cuando $x \to 3^-$ y $y \to -\infty$ cuando $x \to 3^+$

3.7 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Si la función racional $y = r(x)$ tiene la asíntota vertical $x = 2$, entonces cuando $x \to 2^+$, ya sea $y \to$____o $y \to$ ____.

2. Si la función racional $y = r(x)$ tiene la asíntota horizontal $y = 2$, entonces $y \to$____cuando $x \to \pm\infty$.

3-6 ■ Las preguntas siguientes son acerca de la función racional

$$r(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{(x+2)(x-3)}$$

3. La función r tiene puntos de intersección x___ y ___.

4. La función r tiene punto de intersección y _____.

5. La función r tiene asíntotas verticales $x =$ _____ y $x =$ _____.

6. La función r tiene asíntota horizontal $y =$ _____.

HABILIDADES

7-10 ■ Nos dan una función racional. **(a)** Complete cada tabla para la función. **(b)** Describa el comportamiento de la función cerca de su asíntota vertical, basada en las Tablas 1 y 2. **(c)** Determine la asíntota horizontal, basada en las Tablas 3 y 4.

TABLA 1

x	$r(x)$
1.5	
1.9	
1.99	
1.999	

TABLA 2

x	$r(x)$
2.5	
2.1	
2.01	
2.001	

TABLA 3

x	$r(x)$
10	
50	
100	
1000	

TABLA 4

x	$r(x)$
−10	
−50	
−100	
−1000	

7. $r(x) = \dfrac{x}{x-2}$

8. $r(x) = \dfrac{4x+1}{x-2}$

9. $r(x) = \dfrac{3x-10}{(x-2)^2}$

10. $r(x) = \dfrac{3x^2+1}{(x-2)^2}$

11-16 ■ Encuentre los puntos de intersección x y y de la función racional.

11. $r(x) = \dfrac{x-1}{x+4}$

12. $s(x) = \dfrac{3x}{x-5}$

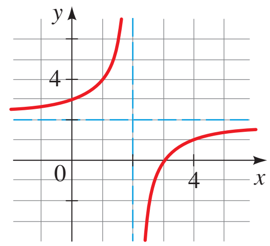
13. $t(x) = \dfrac{x^2-x-2}{x-6}$

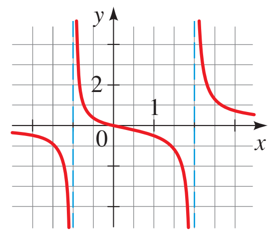
14. $r(x) = \dfrac{2}{x^2+3x-4}$

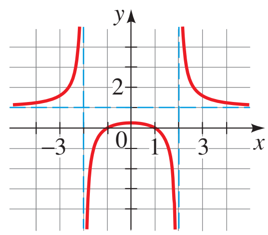
15. $r(x) = \dfrac{x^2-9}{x^2}$

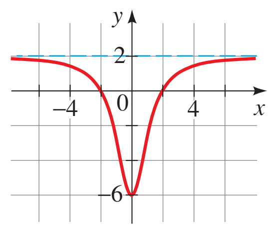
16. $r(x) = \dfrac{x^3+8}{x^2+4}$

17-20 ■ De la gráfica, determine los puntos de intersección x y y y las asíntotas verticales y horizontales.

17. 

18. 

19. 

20. 

21-32 ■ Encuentre todas las asíntotas horizontales y verticales (si las hay).

21. $r(x) = \dfrac{5}{x-2}$

22. $r(x) = \dfrac{2x-3}{x^2-1}$

23. $r(x) = \dfrac{6x}{x^2+2}$

24. $r(x) = \dfrac{2x-4}{x^2+x+1}$

25. $s(x) = \dfrac{6x^2+1}{2x^2+x-1}$

26. $s(x) = \dfrac{8x^2+1}{4x^2+2x-6}$

27. $s(x) = \dfrac{(5x-1)(x+1)}{(3x-1)(x+2)}$

28. $s(x) = \dfrac{(2x-1)(x+3)}{(3x-1)(x-4)}$

29. $r(x) = \dfrac{6x^3-2}{2x^3+5x^2+6x}$

30. $r(x) = \dfrac{5x^3}{x^3+2x^2+5x}$

31. $t(x) = \dfrac{x^2+2}{x-1}$

32. $r(x) = \dfrac{x^3+3x^2}{x^2-4}$

33-40 ■ Use transformaciones de la gráfica de $y = \frac{1}{x}$ para graficar la función racional, como en el Ejemplo 2.

33. $r(x) = \dfrac{1}{x-1}$

34. $r(x) = \dfrac{1}{x+4}$

35. $s(x) = \dfrac{3}{x+1}$

36. $s(x) = \dfrac{-2}{x-2}$

37. $t(x) = \dfrac{2x-3}{x-2}$

38. $t(x) = \dfrac{3x-3}{x+2}$

39. $r(x) = \dfrac{x+2}{x+3}$

40. $r(x) = \dfrac{2x-9}{x-4}$

41-64 ■ Encuentre los puntos de intersección y asíntotas y, a continuación, trace una gráfica de la función racional y exprese el dominio y rango. Use una calculadora graficadora para confirmar su respuesta.

41. $r(x) = \dfrac{4x-4}{x+2}$

42. $r(x) = \dfrac{2x+6}{-6x+3}$

43. $s(x) = \dfrac{4 - 3x}{x + 7}$

44. $s(x) = \dfrac{1 - 2x}{2x + 3}$

45. $r(x) = \dfrac{18}{(x - 3)^2}$

46. $r(x) = \dfrac{x - 2}{(x + 1)^2}$

47. $s(x) = \dfrac{4x - 8}{(x - 4)(x + 1)}$

48. $s(x) = \dfrac{x + 2}{(x + 3)(x - 1)}$

49. $s(x) = \dfrac{6}{x^2 - 5x - 6}$

50. $s(x) = \dfrac{2x - 4}{x^2 + x - 2}$

51. $t(x) = \dfrac{3x + 6}{x^2 + 2x - 8}$

52. $t(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 - 4x}$

53. $r(x) = \dfrac{(x - 1)(x + 2)}{(x + 1)(x - 3)}$

54. $r(x) = \dfrac{2x(x + 2)}{(x - 1)(x - 4)}$

55. $r(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1}$

56. $r(x) = \dfrac{4x^2}{x^2 - 2x - 3}$

57. $r(x) = \dfrac{2x^2 + 10x - 12}{x^2 + x - 6}$

58. $r(x) = \dfrac{2x^2 + 2x - 4}{x^2 + x}$

59. $r(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 + 3x}$

60. $r(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{x^2 - x - 6}$

61. $r(x) = \dfrac{3x^2 + 6}{x^2 - 2x - 3}$

62. $r(x) = \dfrac{5x^2 + 5}{x^2 + 4x + 4}$

63. $s(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - 3x^2}$

64. $t(x) = \dfrac{x^3 - x^2}{x^3 - 3x - 2}$

65-72 ■ Encuentre la asíntota diagonal, las asíntotas verticales y trace una gráfica de la función.

65. $r(x) = \dfrac{x^2}{x - 2}$

66. $r(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x - 1}$

67. $r(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x}$

68. $r(x) = \dfrac{3x - x^2}{2x - 2}$

69. $r(x) = \dfrac{x^2 + 5x + 4}{x - 3}$

70. $r(x) = \dfrac{x^3 + 4}{2x^2 + x - 1}$

71. $r(x) = \dfrac{x^3 + x^2}{x^2 - 4}$

72. $r(x) = \dfrac{2x^3 + 2x}{x^2 - 1}$

73-76 ■ Grafique la función racional f, y determine todas las asíntotas verticales a partir de su gráfica. A continuación, grafique f y g en un rectángulo de vista suficientemente grande como para demostrar que tienen el mismo comportamiento final.

73. $f(x) = \dfrac{2x^2 + 6x + 6}{x + 3}, \quad g(x) = 2x$

74. $f(x) = \dfrac{-x^3 + 6x^2 - 5}{x^2 - 2x}, \quad g(x) = -x + 4$

75. $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 16}{x - 2}, \quad g(x) = x^2$

76. $f(x) = \dfrac{-x^4 + 2x^3 - 2x}{(x - 1)^2}, \quad g(x) = 1 - x^2$

77-82 ■ Grafique la función racional, y encuentre todas las asíntotas verticales, puntos de intersección x y y, y extremos locales, correctos al decimal más cercano. A continuación, use división larga para hallar una función polinomial que tenga el mismo comportamiento final que la función racional, y grafique ambas funciones en un rectángulo de vista suficientemente grande como para verificar que los comportamientos finales de la polinomial y la función racional son iguales.

77. $y = \dfrac{2x^2 - 5x}{2x + 3}$

78. $y = \dfrac{x^4 - 3x^3 + x^2 - 3x + 3}{x^2 - 3x}$

79. $y = \dfrac{x^5}{x^3 - 1}$

80. $y = \dfrac{x^4}{x^2 - 2}$

81. $r(x) = \dfrac{x^4 - 3x^3 + 6}{x - 3}$

82. $r(x) = \dfrac{4 + x^2 - x^4}{x^2 - 1}$

APLICACIONES

83. Crecimiento poblacional Suponga que la población de conejos de la granja de Mr. Jenkin sigue la fórmula

$$p(t) = \frac{3000t}{t + 1}$$

donde $t \geq 0$ es el tiempo (en meses) desde principios del año.

(a) Trace una gráfica de la población de conejos.

(b) ¿Qué ocurre finalmente a la población de conejos?

84. Concentración de medicamento Después que cierta droga se inyecta en un paciente, se vigila la concentración c de la droga en el torrente sanguíneo. En el tiempo $t \geq 0$ (en horas desde que se aplicó la droga), la concentración (en mg/L) está dada por

$$c(t) = \frac{30t}{t^2 + 2}$$

(a) Trace una gráfica de la concentración del medicamento.

(b) ¿Qué ocurre finalmente a la concentración del medicamento en el torrente sanguíneo?

85. Concentración de medicamento Se administra una droga a un paciente, y se vigila la concentración de la droga en su torrente sanguíneo. En el tiempo $t \geq 0$ (en horas desde que se aplicó la droga), la concentración (en mg/L) está dada por

$$c(t) = \frac{5t}{t^2 + 1}$$

Grafique la función c con una calculadora graficadora.

(a) ¿Cuál es la concentración más alta de droga que se alcanza en el torrente sanguíneo del paciente?

(b) ¿Qué ocurre a la concentración de medicamento después de un tiempo prolongado?

(c) ¿Cuánto tarda la concentración en bajar a menos de 0.3 mg/L?