5.1 LA CIRCUNFERENCIA UNITARIA

La circunferencia unitaria ▶ Puntos terminales en la circunferencia unitaria ▶ El número de referencia

En esta sección exploramos algunas propiedades de la circunferencia de radio 1 con centro en el origen. Estas propiedades se usan en la siguiente sección para definir las funciones trigonométricas.

▼ La circunferencia unitaria

El conjunto de puntos a una distancia 1 del origen es una circunferencia de radio 1 (vea Figura 1). En la Sección 1.8 aprendimos que la ecuación de esta circunferencia es $x^2 + y^2 = 1$.

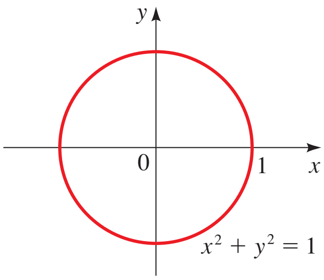


FIGURA 1 La circunferencia unitaria

LA CIRCUNFERENCIA UNITARIA

La **circunferencia unitaria** es de radio 1 con centro en el origen en el plano xy. Su ecuación es

$$x^2 + y^2 = 1$$

EJEMPLO 1 | Un punto en la circunferencia unitaria

Demuestre que el punto $P\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ está en la circunferencia unitaria.

SOLUCIÓN Necesitamos demostrar que este punto satisface la ecuación de la circunferencia unitaria, es decir, $x^2 + y^2 = 1$. Como

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \frac{3}{9} + \frac{6}{9} = 1$$

P está en la circunferencia unitaria.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **3** ■

EJEMPLO 2 | Localizar un punto sobre la circunferencia unitaria

El punto $P(\sqrt{3}/2, y)$ está en la circunferencia unitaria en el cuarto cuadrante. Encuentre su coordenada y.

SOLUCIÓN Como el punto está en la circunferencia unitaria, tenemos

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + y^2 = 1$$

$$y^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$y = \pm\frac{1}{2}$$

Como el punto está en el cuarto cuadrante, su coordenada y debe ser negativa, de modo que $y = -\frac{1}{2}$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **9** ■

▼ Puntos terminales en la circunferencia unitaria

Suponga que t es un número real. Marquemos una distancia t a lo largo de la circunferencia unitaria, empezando en el punto $(1, 0)$ y moviéndonos en dirección contraria al giro de las manecillas de un reloj si t es positiva y en el sentido de las manecillas si t es negativa (Figura 2).

En esta forma llegamos al punto $P(x, y)$ en la circunferencia. El punto $P(x, y)$ obtenido en esta forma se llama **punto terminal** determinado por el número real t.

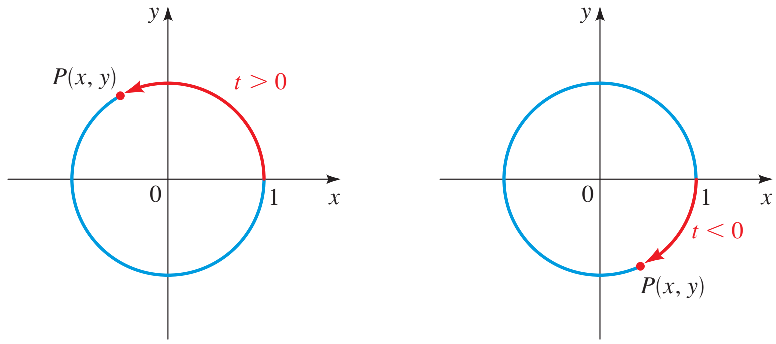


FIGURA 2 (a) Punto terminal $P(x, y)$ determinado por $t > 0$ (b) Punto terminal $P(x, y)$ determinado por $t < 0$

La circunferencia unitaria es $C = 2\pi(1) = 2\pi$. Entonces, si un punto inicia en $(1, 0)$ y se mueve en sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj en toda la vuelta del círculo unitario y regresa a $(1, 0)$, viaja una distancia de 2π. Para moverse la mitad alrededor del círculo, viaja una distancia de $\frac{1}{2}(2\pi) = \pi$. Para moverse un cuarto de la distancia alrededor del círculo, viaja una distancia de $\frac{1}{4}(2\pi) = \pi/2$. ¿Dónde termina el punto cuando viaja estas distancias a lo largo del círculo? De la Figura 3 vemos, por ejemplo, que cuando viaja una distancia de π iniciando en $(1, 0)$, su punto terminal es $(-1, 0)$.

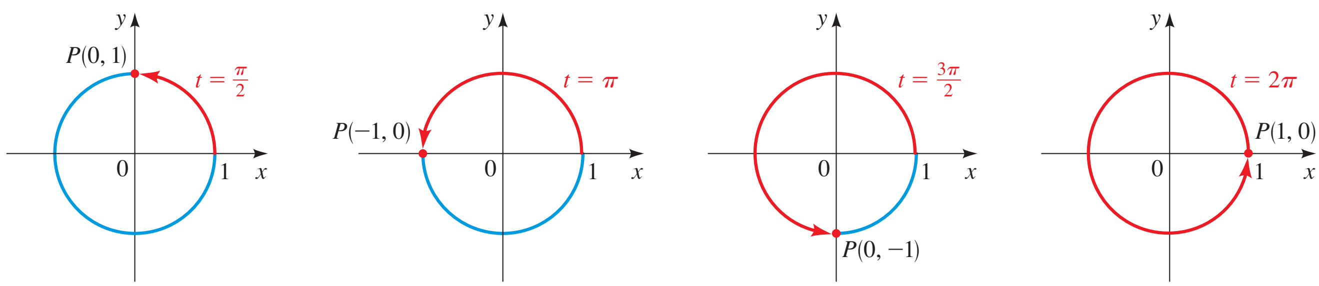


FIGURA 3 Puntos terminales determinados por $t = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ y 2π.

EJEMPLO 3 | Hallar puntos terminales

Encuentre el punto terminal en la circunferencia unitaria determinado por cada número real t.

(a) $t = 3\pi$ **(b)** $t = -\pi$ **(c)** $t = -\dfrac{\pi}{2}$

SOLUCIÓN De la Figura 4 obtenemos lo siguiente:

(a) El punto terminal determinado por 3π es $(-1, 0)$.

(b) El punto terminal determinado por $-\pi$ es $(-1, 0)$.

(c) El punto terminal determinado por $-\pi/2$ es $(0, -1)$.

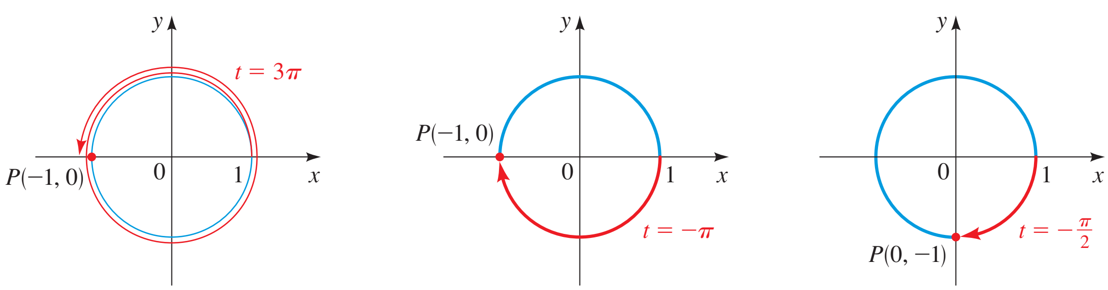


FIGURA 4

Observe que diferentes valores de t pueden determinar el mismo punto terminal.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **23**

El punto terminal $P(x, y)$ determinado por $t = \pi/4$ es la misma distancia de $(1, 0)$ que $(0, 1)$ a lo largo de la circunferencia unitaria (vea Figura 5).

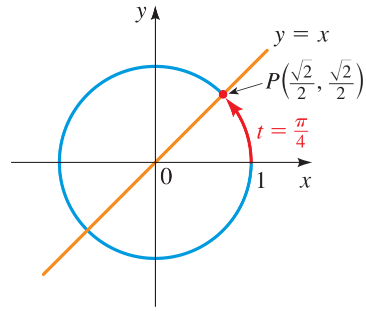


FIGURA 5

Como la circunferencia unitaria es simétrica con respecto a la recta $y = x$, se deduce que P se encuentra sobre la recta $y = x$. Por lo tanto, P es el punto de intersección (en el primer cuadrante) de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y la recta $y = x$. Sustituyendo x por y en la ecuación de la circunferencia, obtenemos

$$x^2 + x^2 = 1$$

$$2x^2 = 1 \qquad \text{Combine términos semejantes}$$

$$x^2 = \frac{1}{2} \qquad \text{Divida entre 2}$$

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{Tome raíces cuadradas}$$

Como P está en el primer cuadrante, $x = 1/\sqrt{2}$ y como $y = x$, tenemos $y = 1/\sqrt{2}$ también. Entonces, el punto terminal determinado por $\pi/4$ es

$$P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Se pueden usar métodos similares para hallar los puntos terminales determinados por $t = \pi/6$ y $t = \pi/3$ (vea Ejercicios 57 y 58). La Tabla 1 y la Figura 6 dan los puntos terminales para algunos valores especiales de t.

TABLA 1

t	Punto terminal determinado por t
0	$(1, 0)$
$\frac{\pi}{6}$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$\frac{\pi}{4}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\frac{\pi}{3}$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\frac{\pi}{2}$	$(0, 1)$

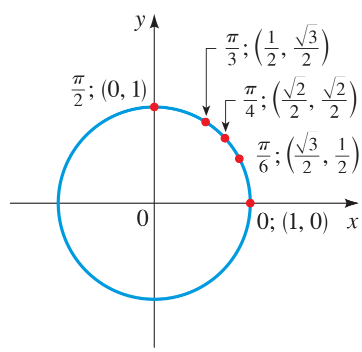


FIGURA 6

EJEMPLO 4 | Hallar puntos terminales

Encuentre el punto terminal determinado por cada número real t dado.

(a) $t = -\frac{\pi}{4}$ **(b)** $t = \frac{3\pi}{4}$ **(c)** $t = -\frac{5\pi}{6}$

SOLUCIÓN

(a) Sea P el punto terminal determinado por $-\pi/4$, y sea Q el punto terminal determinado por $\pi/4$. De la Figura 7(a) vemos que el punto P tiene las mismas coordenadas que Q excepto por el signo de la coordenada en y. Como P está en el cuarto cuadrante, su coordenada x es positiva y su coordenada y es negativa. Entonces, el punto terminal es $P\left(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2\right)$.

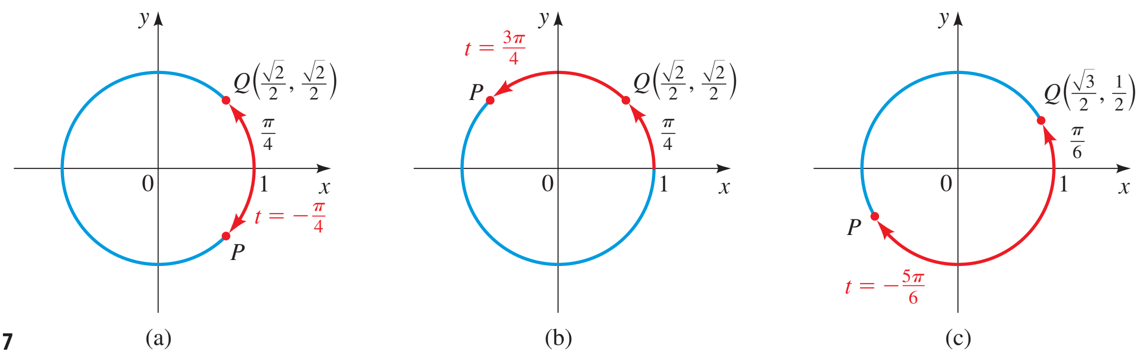


FIGURA 7

(b) Sea P el punto terminal determinado por $3\pi/4$, y sea Q el punto terminal determinado por $\pi/4$. De la Figura 7(b) vemos que el punto P tiene las mismas coordenadas que Q excepto por el signo de la coordenada en x. Como P está en el segundo cuadrante, su coordenada x es negativa y su coordenada y es positiva. Entonces, el punto terminal es $P\left(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right)$.

(c) Sea P el punto terminal determinado por $-5\pi/6$, y sea Q el punto terminal determinado por $\pi/6$. De la Figura 7(c) vemos que el punto P tiene las mismas coordenadas que Q excepto por el signo. Como P está en el tercer cuadrante, sus coordenadas son ambas negativas. Entonces, el punto terminal es $P\left(-\sqrt{3}/2, -\frac{1}{2}\right)$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **25**

El número de referencia

De los Ejemplos 3 y 4 vemos que para hallar un punto terminal en cualquier cuadrante sólo necesitamos saber el punto terminal "correspondiente" en el primer cuadrante. Usamos la idea del *número de referencia* para ayudarnos a hallar puntos terminales.

NÚMERO DE REFERENCIA

Sea t un número real. El **número de referencia** $\bar{t}$ asociado con t es la distancia más corta a lo largo de la circunferencia unitaria entre el punto terminal determinado por t y el eje x.

La Figura 8 muestra que para hallar el número de referencia $\bar{t}$, es útil saber el cuadrante en el que se encuentre el punto terminal determinado por t. Si el punto terminal se encuentra en el primero o cuarto cuadrante, donde x es positiva, encontramos $\bar{t}$ al movernos a lo largo de la circunferencia al eje x *positivo*. Si se encuentra en los cuadrantes segundo o tercero, donde x es negativa, encontramos $\bar{t}$ al movernos a lo largo de la circunferencia al eje x *negativo*.

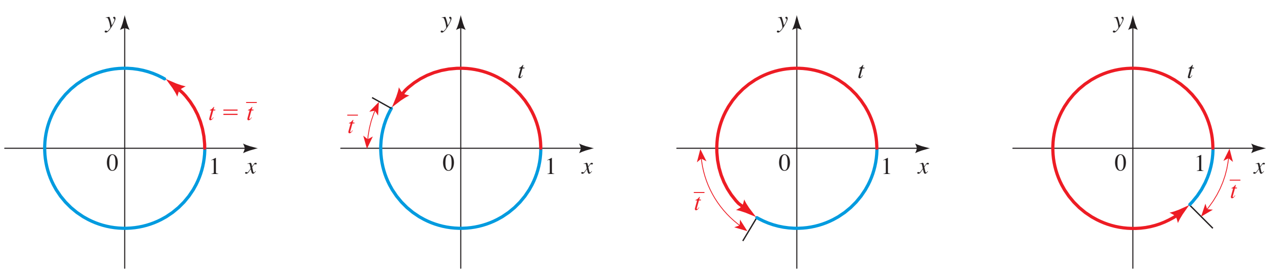


FIGURA 8 El número de referencia $\bar{t}$ por t.

EJEMPLO 5 | Hallar números de referencia

Encuentre el número de referencia para cada valor de t.

(a) $t = \dfrac{5\pi}{6}$ **(b)** $t = \dfrac{7\pi}{4}$ **(c)** $t = -\dfrac{2\pi}{3}$ **(d)** $t = 5.80$

SOLUCIÓN De la Figura 9 encontramos los números de referencia como sigue:

(a) $\bar{t} = \pi - \dfrac{5\pi}{6} = \dfrac{\pi}{6}$

(b) $\bar{t} = 2\pi - \dfrac{7\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4}$

(c) $\bar{t} = \pi - \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3}$

(d) $\bar{t} = 2\pi - 5.80 \approx 0.48$

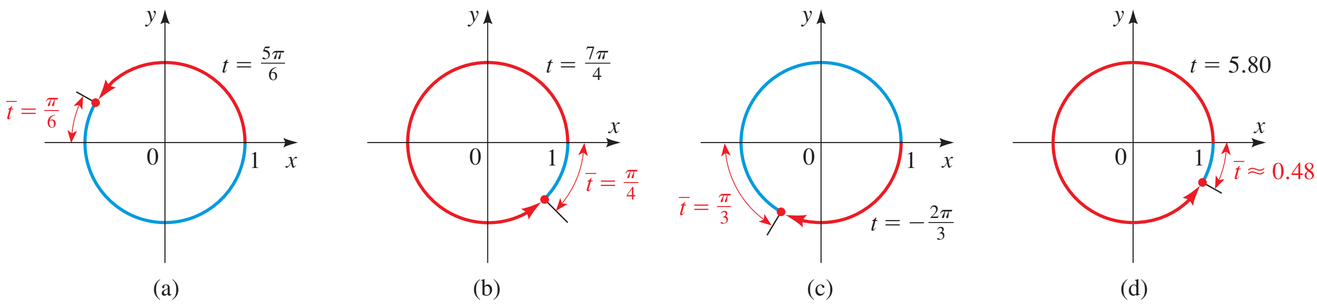


FIGURA 9

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **35**

USO DE NÚMEROS DE REFERENCIA PARA HALLAR PUNTOS TERMINALES

Para hallar el punto terminal P determinado por cualquier valor de t, usamos los pasos siguientes:

1. Encuentre el número de referencia $\bar{t}$.
2. Encuentre el punto terminal $Q(a, b)$ determinado por $\bar{t}$.
3. El punto terminal determinado por t es $P(\pm a, \pm b)$, donde los signos se escogen de acuerdo con el cuadrante en el que se encuentre este punto terminal.

EJEMPLO 6 | Uso de números de referencia para hallar puntos terminales

Encuentre el punto terminal determinado por cada número real t dado.

(a) $t = \dfrac{5\pi}{6}$ **(b)** $t = \dfrac{7\pi}{4}$ **(c)** $t = -\dfrac{2\pi}{3}$

SOLUCIÓN Los números de referencia asociados con estos valores de t se hallaron en el Ejemplo 5.

(a) El número de referencia es $\bar{t} = \pi/6$, que determina el punto terminal $\left(\sqrt{3}/2, \frac{1}{2}\right)$ de la Tabla 1. Como el punto terminal determinado por t está en el segundo cuadrante, su coordenada x es negativa y su coordenada y es positiva. Entonces, el punto terminal deseado es

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

(b) El número de referencia es $\bar{t} = \pi/4$, que determina el punto terminal $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ de la Tabla 1. Como el punto terminal está en el cuarto cuadrante, su coordenada x es positiva y su coordenada y es negativa. Entonces, el punto terminal deseado es

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

(c) El número de referencia es $\bar{t} = \pi/3$, que determina el punto terminal $(\frac{1}{2}, \sqrt{3}/2)$ de la Tabla 1. Como el punto terminal está determinado por t en el tercer cuadrante, sus coordenadas son ambas negativas. Entonces, el punto terminal deseado es

$$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **39**

Como el perímetro de la circunferencia unitaria es 2π, el punto terminal determinado por t es el mismo que el determinado por $t + 2\pi$ o $t - 2\pi$. En general, podemos sumar o restar 2π cualquier número de veces sin cambiar el punto terminal determinado por t. Usamos esta observación en el siguiente ejemplo para hallar puntos terminales para t grandes.

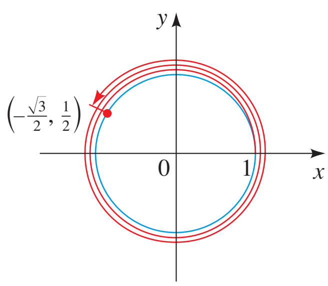


FIGURA 10

EJEMPLO 7 | Hallar el punto terminal para *t* grande

Encuentre el punto terminal determinado por $t = \dfrac{29\pi}{6}$.

SOLUCIÓN Como

$$t = \frac{29\pi}{6} = 4\pi + \frac{5\pi}{6}$$

vemos que el punto terminal de t es el mismo que el de $5\pi/6$ (esto es, restamos 4π). Por lo tanto, por el Ejemplo 6(a) el punto terminal es $(-\sqrt{3}/2, \frac{1}{2})$. (Vea Figura 10.)

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **45**

5.1 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. (a) La circunferencia unitaria es la circunferencia con centro en ____ con radio ____.

(b) La ecuación de la circunferencia unitaria es ______.

(c) Suponga que el punto $P(x, y)$ está en la circunferencia unitaria. Encuentre la coordenada faltante:

(i) $P(1, \square)$ (ii) $P(\square, 1)$

(iii) $P(-1, \square)$ (iv) $P(\square, -1)$

2. (a) Si marcamos una distancia t a lo largo de la circunferencia unitaria, empezando en $(1, 0)$ y moviéndonos en dirección contraria al giro de las manecillas de un reloj, llegamos al punto ______ determinado por t.

(b) Los puntos terminales determinados por $\pi/2$, π, $-\pi/2$, 2π son ________, ________, ________, y ______, respectivamente.

HABILIDADES

3-8 ■ Demuestre que el punto está en la circunferencia unitaria.

3. $\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ **4.** $\left(-\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right)$ **5.** $\left(\frac{7}{25}, \frac{24}{25}\right)$

6. $\left(-\frac{5}{7}, -\frac{2\sqrt{6}}{7}\right)$ **7.** $\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{2}{3}\right)$ **8.** $\left(\frac{\sqrt{11}}{6}, \frac{5}{6}\right)$

9-14 ■ Encuentre la coordenada faltante de P, usando el hecho de que P se encuentra en la circunferencia unitaria en el cuadrante dado.

Coordenadas	Cuadrante
9. $P(-\frac{3}{5}, \square)$	III
10. $P(\square, -\frac{7}{25})$	IV
11. $P(\square, \frac{1}{3})$	II

Coordenadas	Cuadrante
12. $P\left(\frac{2}{5},\ \square\right)$	I
13. $P\left(\square,\ -\frac{2}{7}\right)$	IV
14. $P\left(-\frac{2}{3},\ \square\right)$	II

15-20 ■ El punto P está en la circunferencia unitaria. Encuentre $P(x, y)$ a partir de la información dada.

15. La coordenada x de P es $\frac{4}{5}$, y la coordenada y es positiva.

16. La coordenada y de P es $-\frac{1}{3}$, y la coordenada x es positiva.

17. La coordenada y de P es $\frac{2}{3}$, y la coordenada x es negativa.

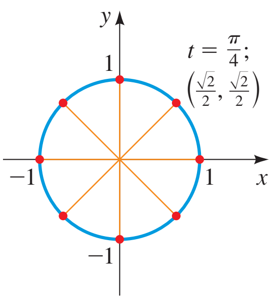
18. La coordenada x de P es positiva, y la coordenada y de P es $-\sqrt{5}/5$.

19. La coordenada x de P es $-\sqrt{2}/3$, y P está abajo del eje x.

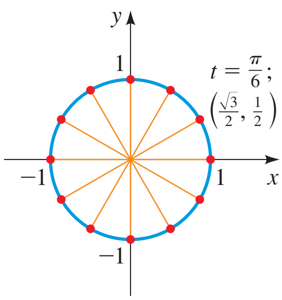
20. La coordenada x de P es $-\frac{2}{5}$, y P está arriba del eje x.

21-22 ■ Encuentre t y el punto terminal determinado por t para cada punto de la figura. En el Ejercicio 21, t aumenta en incrementos de $\pi/4$; al igual que en el Ejercicio 22, t aumenta en incrementos de $\pi/6$.

21.



22.



23-32 ■ Encuentre el punto terminal $P(x, y)$ en la circunferencia unitaria determinado por el valor dado de t.

23. $t = \dfrac{\pi}{2}$

24. $t = \dfrac{3\pi}{2}$

25. $t = \dfrac{5\pi}{6}$

26. $t = \dfrac{7\pi}{6}$

27. $t = -\dfrac{\pi}{3}$

28. $t = \dfrac{5\pi}{3}$

29. $t = \dfrac{2\pi}{3}$

30. $t = -\dfrac{\pi}{2}$

31. $t = -\dfrac{3\pi}{4}$

32. $t = \dfrac{11\pi}{6}$

33. Suponga que el punto terminal determinado por t es el punto $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ en la circunferencia unitaria. Encuentre el punto terminal determinado por cada uno de los siguientes.

(a) $\pi - t$ **(b)** $-t$

(c) $\pi + t$ **(d)** $2\pi + t$

34. Suponga que el punto terminal determinado por t es el punto $\left(\frac{3}{4}, \sqrt{7}/4\right)$ en la circunferencia unitaria. Encuentre el punto terminal determinado por cada uno de los siguientes.

(a) $-t$ **(b)** $4\pi + t$

(c) $\pi - t$ **(d)** $t - \pi$

35-38 ■ Encuentre el número de referencia para cada valor de t.

35. (a) $t = \dfrac{5\pi}{4}$ **(b)** $t = \dfrac{7\pi}{3}$

(c) $t = -\dfrac{4\pi}{3}$ **(d)** $t = \dfrac{\pi}{6}$

36. (a) $t = \dfrac{5\pi}{6}$ **(b)** $t = \dfrac{7\pi}{6}$

(c) $t = \dfrac{11\pi}{3}$ **(d)** $t = -\dfrac{7\pi}{4}$

37. (a) $t = \dfrac{5\pi}{7}$ **(b)** $t = -\dfrac{7\pi}{9}$

(c) $t = -3$ **(d)** $t = 5$

38. (a) $t = \dfrac{11\pi}{5}$ **(b)** $t = -\dfrac{9\pi}{7}$

(c) $t = 6$ **(d)** $t = -7$

39-52 ■ Encuentre **(a)** el número de referencia para cada valor de t y **(b)** el punto terminal determinado por t.

39. $t = \dfrac{2\pi}{3}$

40. $t = \dfrac{4\pi}{3}$

41. $t = \dfrac{3\pi}{4}$

42. $t = \dfrac{7\pi}{3}$

43. $t = -\dfrac{2\pi}{3}$

44. $t = -\dfrac{7\pi}{6}$

45. $t = \dfrac{13\pi}{4}$

46. $t = \dfrac{13\pi}{6}$

47. $t = \dfrac{7\pi}{6}$

48. $t = \dfrac{17\pi}{4}$

49. $t = -\dfrac{11\pi}{3}$

50. $t = \dfrac{31\pi}{6}$

51. $t = \dfrac{16\pi}{3}$

52. $t = -\dfrac{41\pi}{4}$

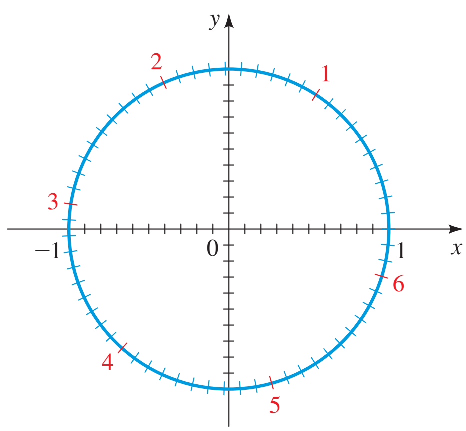
53-56 ■ Use la figura para hallar el punto terminal determinado por el número real t, con coordenadas redondeadas a un lugar decimal.

53. $t = 1$

54. $t = 2.5$

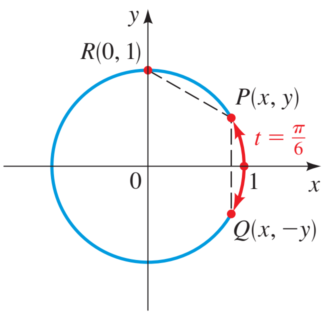
55. $t = -1.1$

56. $t = 4.2$

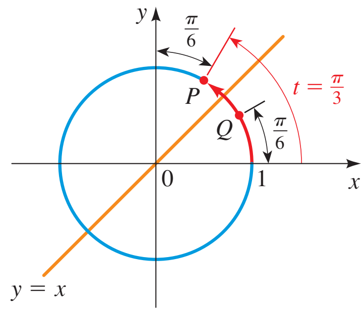


DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

57. Hallar el punto terminal para $\pi/6$ Suponga que el punto terminal determinado por $t = \pi/6$ es $P(x, y)$ y los puntos Q y R son como se ve en la figura. ¿Por qué son iguales las distancias PQ y PR? Use este dato, junto con la Fórmula de la Distancia, para demostrar que las coordenadas de P satisfacen la ecuación $2y = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2}$. Simplifique esta ecuación usando el hecho de que $x^2 + y^2 = 1$. Resuelva la ecuación simplificada para hallar $P(x, y)$.



58. Hallar el punto terminal para $\pi/3$ Ahora que ya sabe usted el punto terminal determinado por $t = \pi/6$, use simetría para hallar el punto terminal determinado por $t = \pi/3$ (vea la figura). Explique su razonamiento.



5.2 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE NÚMEROS REALES

Las funciones trigonométricas ▶ Valores de las funciones trigonométricas ▶ Identidades fundamentales

Una función es una regla que asigna a cada número real otro número real. En esta sección usamos propiedades de la circunferencia unitaria de la sección precedente para definir las funciones trigonométricas.

▼ Las funciones trigonométricas

Recuerde que para hallar el punto terminal $P(x, y)$ para un número real dado t, nos movemos una distancia t a lo largo de la circunferencia unitaria, empezando en el punto $(1, 0)$. Nos movemos en dirección contraria al giro de las manecillas del reloj si t es positiva y en la dirección de las manecillas si t es negativa (vea Figura 1). A continuación usamos las coordenadas x y y del punto $P(x, y)$ para definir varias funciones. Por ejemplo, definimos la función llamada *seno* al asignar a cada número real t la coordenada y del punto terminal $P(x, y)$ determinado por t. Las funciones *coseno*, *tangente*, *cosecante*, *secante* y *cotangente* también se definen si usamos las coordenadas de $P(x, y)$.

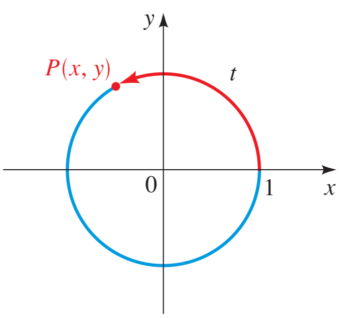


FIGURA 1

DEFINICIÓN DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Sea t cualquier número real y sea $P(x, y)$ el punto terminal en la circunferencia unitaria determinado por t. Definimos

$$\operatorname{sen} t = y \qquad \cos t = x \qquad \tan t = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$\csc t = \frac{1}{y} \quad (y \neq 0) \qquad \sec t = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0) \qquad \cot t = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$

Debido a que las funciones trigonométricas se pueden definir en términos de la circunferencia unitaria, a veces reciben el nombre de **funciones circulares**.

EJEMPLO 1 | Evaluación de funciones trigonométricas

Encuentre las seis funciones trigonométricas de cada número real t dado.

(a) $t = \dfrac{\pi}{3}$ **(b)** $t = \dfrac{\pi}{2}$

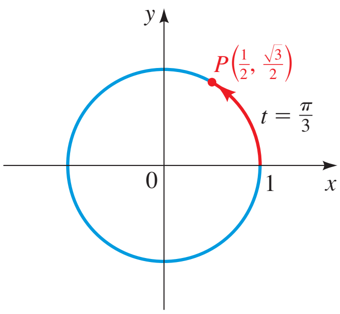


FIGURA 2

SOLUCIÓN

(a) De la Tabla 1 de la página 372, vemos que el punto terminal determinado por $t = \pi/3$ es $P(\frac{1}{2}, \sqrt{3}/2)$. (Vea Figura 2.) Como las coordenadas son $x = \frac{1}{2}$ y $y = \sqrt{3}/2$, tenemos

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \qquad \tan\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$$

$$\csc\frac{\pi}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \sec\frac{\pi}{3} = 2 \qquad \cot\frac{\pi}{3} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

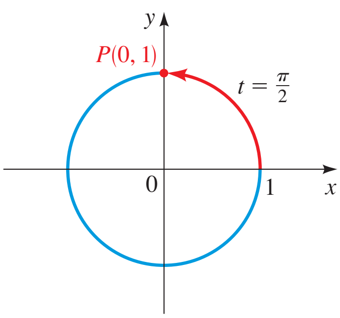


FIGURA 3

(b) El punto terminal determinado por $\pi/2$ es $P(0, 1)$. (Vea Figura 3.) Por lo tanto,

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1 \qquad \cos\frac{\pi}{2} = 0 \qquad \csc\frac{\pi}{2} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \cot\frac{\pi}{2} = \frac{0}{1} = 0$$

Pero $\tan \pi/2$ y $\sec \pi/2$ no están definidos porque $x = 0$ aparece en el denominador en cada una de sus definiciones.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 3

Algunos valores especiales de las funciones trigonométricas se dan en la Tabla 1. Esta tabla se obtiene con facilidad de la Tabla 1 de la Sección 5.1, junto con las definiciones de las funciones trigonométricas.

TABLA 1
Valores especiales de las funciones trigonométricas

t	sen t	cos t	tan t	csc t	sec t	cot t
0	0	1	0	—	1	—
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	—	1	—	0

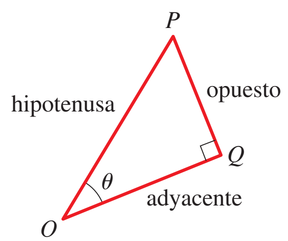
Podemos fácilmente recordar los senos y cosenos de los ángulos básicos si los escribimos en la forma $\sqrt{\square}/2$:

t	sen t	cos t
0	$\sqrt{0}/2$	$\sqrt{4}/2$
$\pi/6$	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{1}/2$
$\pi/2$	$\sqrt{4}/2$	$\sqrt{0}/2$

El Ejemplo 1 muestra que algunas de las funciones trigonométricas no están definidas para ciertos números reales, por lo cual es necesario determinar sus dominios. Las funciones seno y coseno están definidas para todos los valores de t. Como las funciones cotangente y cosecante tienen y en el denominador de sus definiciones, no están definidas siempre que la coordenada y del punto terminal $P(x, y)$ determinado por t sea 0. Esto ocurre cuando $t = n\pi$ para cualquier entero n, de modo que sus dominios no incluyen estos puntos. Las funciones tangente y secante tienen x en el denominador en sus definiciones, de modo que no están definidas siempre que $x = 0$. Esto ocurre cuando $t = (\pi/2) + n\pi$ para cualquier entero n.

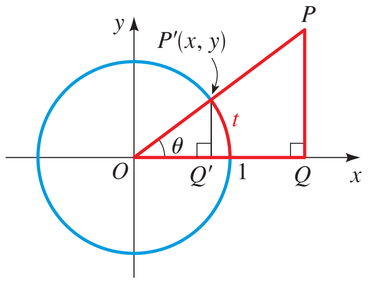
Relación con las funciones trigonométricas de ángulos

Si ya usted ha estudiado trigonometría de triángulos rectángulos (Capítulo 6), es probable se pregunte cómo el seno y coseno de un *ángulo* se relacionan con los de esta sección. Para ver cómo es esto, empecemos con un triángulo rectángulo, ΔOPQ.



Triángulo rectángulo *OPQ*

Ponga el triángulo en el plano de coordenadas como se muestra, con el ángulo θ en posición normal.



$P'(x, y)$ es el punto terminal determinado por t.

El punto $P'(x, y)$ de la figura es el punto terminal determinado por el arco t. Observe que el triángulo OPQ es semejante al triángulo pequeño $OP'Q'$ cuyos catetos tienen longitudes x y y.

A continuación, por la definición de las funciones trigonométricas del ángulo θ tenemos:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} = \frac{PQ}{OP} = \frac{P'Q'}{OP'}$$

$$= \frac{y}{1} = y$$

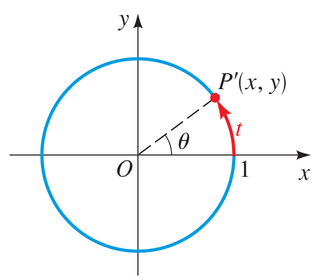
$$\cos\theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} = \frac{OQ}{OP} = \frac{OQ'}{OP'}$$

$$= \frac{x}{1} = x$$

Por la definición de las funciones trigonométricas del *número real* t, tenemos

$$\operatorname{sen} t = y \qquad \cos t = x$$

A continuación, si θ se mide en radianes, entonces $\theta = t$ (vea la figura). Por lo tanto, las funciones trigonométricas del ángulo con medida en radianes θ son exactamente iguales que las funciones trigonométricas definidas en términos del punto terminal determinado por el número real t.



La medida en radianes del ángulo θ es t.

¿Por qué entonces estudiar trigonometría en dos formas diferentes? Porque diferentes aplicaciones requieren que veamos las funciones trigonométricas de modo diferente. (Compare la Sección 5.6 con las Secciones 6.2, 6.5 y 6.6.)

DOMINIOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Función	Dominio
sen x, cos x	Todos los números reales
tan x, sec x	Todos los números reales que no sean $\frac{\pi}{2} + n\pi$ para cualquier entero n
cot x, csc x	Todos los números reales que no sean $n\pi$ para cualquier entero n

▼ Valores de las funciones trigonométricas

Para calcular otros valores de las funciones trigonométricas, primero determinamos sus signos. Los signos de las funciones trigonométricas dependen del cuadrante en el que se encuentre el punto terminal de t. Por ejemplo, si el punto terminal $P(x, y)$ determinado por t está en el tercer cuadrante, entonces sus coordenadas son negativas ambas. En consecuencia, sen t, cos t, csc t y sec t son todas negativas, mientras que tan t y cos t son positivas. Se pueden comprobar las otras entradas del recuadro siguiente.

SIGNOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Cuadrante	Funciones positivas	Funciones negativas
I	todas	ninguna
II	sen x, csc x	cos x, sec x, tan x, cot x
III	tan x, cot x	sen x, csc x, cos x, sec x
IV	cos x, sec x	sen x, csc x, tan x, cot x

Por ejemplo, $\cos(2\pi/3) < 0$ porque el punto terminal de $t = 2\pi/3$ está en el segundo cuadrante, mientras que $\tan 4 > 0$ porque el punto terminal de $t = 4$ está en el tercer cuadrante.

En la Sección 5.1 utilizamos el número de referencia para hallar el punto terminal determinado por un número real t. Como las funciones trigonométricas están definidas en términos de las coordenadas de puntos terminales, podemos usar el número de referencia para hallar valores de las funciones trigonométricas. Suponga que $\bar{t}$ es el número de referencia para t. Entonces el punto terminal de $\bar{t}$ tiene las mismas coordenadas, excepto posiblemente por el signo, como el punto terminal de t. Entonces, los valores de las funciones trigonométricas en t son iguales, excepto posiblemente por el signo, como sus valores en $\bar{t}$. Ilustramos este procedimiento en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 | Evaluación de funciones trigonométricas

Encuentre cada valor de lo siguiente.

(a) $\cos\dfrac{2\pi}{3}$ **(b)** $\tan\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$ **(c)** $\operatorname{sen}\dfrac{19\pi}{4}$

SOLUCIÓN

(a) El número de referencia para $2\pi/3$ es $\pi/3$ (vea Figura 4(a)). Como el punto terminal de $2\pi/3$ está en el segundo cuadrante, $\cos(2\pi/3)$ es negativo. Entonces,

$$\cos\frac{2\pi}{3} = \underbrace{-}_{\text{Signo}}\cos\underbrace{\frac{\pi}{3}}_{\text{Número de referencia}} = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{\text{De la Tabla 1}}$$

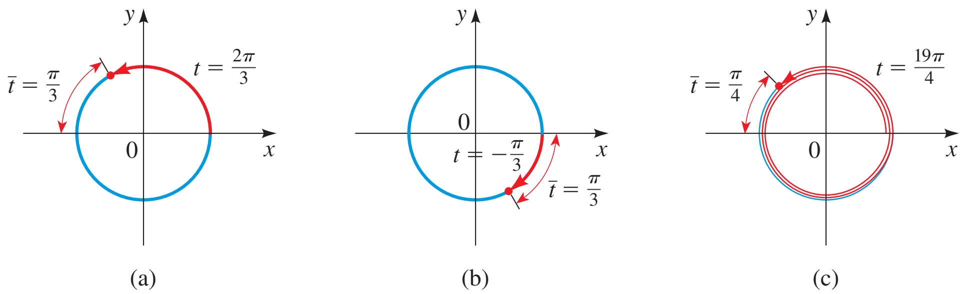


FIGURA 4

(b) El número de referencia para $-\pi/3$ es $\pi/3$ (vea Figura 4(b)). Como el punto terminal es $-\pi/3$ está en el cuarto cuadrante, $\tan(-\pi/3)$ es negativa. Por lo tanto,

$$\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \underbrace{-}_{\text{Signo}}\tan \underbrace{\frac{\pi}{3}}_{\text{Número de referencia}} = \underbrace{-\sqrt{3}}_{\text{De la Tabla 1}}$$

(c) Como $(19\pi/4) - 4\pi = 3\pi/4$, los puntos terminales determinados por $19\pi/4$ y $3\pi/4$ son los mismos. El número de referencia para $3\pi/4$ es $\pi/4$ (vea Figura 4(c)). Como el punto terminal de $3\pi/4$ está en el segundo cuadrante, $\operatorname{sen}(3\pi/4)$ es positivo. Entonces,

$$\operatorname{sen}\frac{19\pi}{4} \underbrace{=}_{\text{Reste } 4\pi} \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} = \underbrace{+}_{\text{Signo}}\operatorname{sen}\underbrace{\frac{\pi}{4}}_{\text{Número de referencia}} = \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\text{De la Tabla 1}}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **7** ■

Hasta este punto, hemos podido calcular los valores de las funciones trigonométricas sólo para ciertos valores de t. De hecho, podemos calcular los valores de las funciones trigonométricas siempre que t sea múltiplo de $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$ y $\pi/2$. ¿Cómo podemos calcular las funciones trigonométricas para otros valores de t? Por ejemplo, ¿cómo podemos hallar sen 1.5? Una forma es trazando cuidadosamente un diagrama y leer el valor (vea Ejercicios 39-46), pero este método no es muy preciso. Por fortuna, programados directamente en calculadoras científicas son procedimientos matemáticos (vea nota al margen en la página 400) que encuentran los valores de las funciones *seno*, *coseno* y *tangente* redondeados al número de dígitos en la pantalla. La calculadora debe ser puesta en el *modo de radianes* para evaluar estas funciones. Para hallar valores de las funciones cosecante, secante y cotangente usando una calculadora, necesitamos usar las siguientes *relaciones recíprocas:*

$$\csc t = \frac{1}{\operatorname{sen} t} \qquad \sec t = \frac{1}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{1}{\tan t}$$

Estas identidades se siguen de las definiciones de las funciones trigonométricas. Por ejemplo, como $\operatorname{sen} t = y$ y $\csc t = 1/y$, tenemos $\csc t = 1/y = 1/(\operatorname{sen} t)$. Los otros se obtienen de un modo semejante.

EJEMPLO 3 | Uso de calculadora para evaluar funciones trigonométricas

Asegurándonos que nuestra calculadora esté puesta en el modo de radianes y redondeando los resultados a seis lugares decimales, obtenemos:

(a) $\operatorname{sen} 2.2 \approx 0.808496$ **(b)** $\cos 1.1 \approx 0.453596$

(c) $\cot 28 = \dfrac{1}{\tan 28} \approx -3.553286$ **(d)** $\csc 0.98 = \dfrac{1}{\operatorname{sen} 0.98} \approx 1.204098$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **41** Y **43** ■

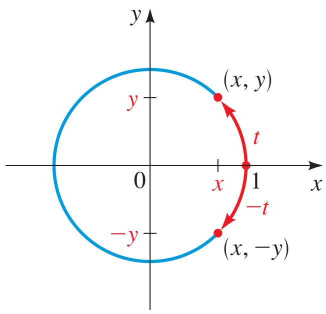


FIGURA 5

Consideremos la relación entre las funciones trigonométricas de t y las de $-t$. De la Figura 5 vemos que

$$\operatorname{sen}(-t) = -y = -\operatorname{sen} t$$
$$\cos(-t) = x = \cos t$$
$$\tan(-t) = \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x} = -\tan t$$

Estas identidades muestran que las funciones seno y tangente son funciones impares, en tanto que la función coseno es una función par. Es fácil ver que la recíproca de una función par es par y la recíproca de una función impar es impar. Este dato, junto con las relaciones recíprocas, completa nuestro conocimiento de las propiedades par-impar para todas las funciones trigonométricas.

Las funciones pares e impares están definidas en la Sección 2.5.

PROPIEDADES PARES-IMPARES

Las funciones seno, cosecante, tangente y cotangente son funciones impares; las funciones coseno y secante son funciones pares.

$$\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t \qquad \cos(-t) = \cos t \qquad \tan(-t) = -\tan t$$
$$\csc(-t) = -\csc t \qquad \sec(-t) = \sec t \qquad \cot(-t) = -\cot t$$

EJEMPLO 4 | Funciones trigonométricas pares e impares

Use las propiedades pares-impares de las funciones trigonométricas para determinar cada valor.

(a) $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ **(b)** $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

SOLUCIÓN Por las propiedades pares-impares y la Tabla 1 tenemos

(a) $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$ Seno es impar

(b) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ Coseno es par

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **13**

Identidades fundamentales

Las funciones trigonométricas están relacionadas entre sí por medio de expresiones llamadas **identidades trigonométricas**. Damos las más importantes en el recuadro siguiente.*

IDENTIDADES FUNDAMENTALES

Identidades recíprocas

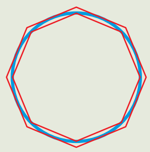
$$\csc t = \frac{1}{\operatorname{sen} t} \qquad \sec t = \frac{1}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{1}{\tan t} \qquad \tan t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t}$$

Identidades de Pitágoras

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1 \qquad \tan^2 t + 1 = \sec^2 t \qquad 1 + \cot^2 t = \csc^2 t$$

* Seguimos la convención acostumbrada de escribir $\operatorname{sen}^2 t$ por $(\operatorname{sen} t)^2$. En general, escribimos $\operatorname{sen}^n t$ por $(\operatorname{sen} t)^n$ por todos los enteros n excepto $n = -1$. Al exponente $n = -1$ se le asignará otro significado en la Sección 5.5. Por supuesto, la misma convención aplica a las otras cinco funciones trigonométricas.

El valor de π
El número π es la relación entre la circunferencia de un círculo y su diámetro. Desde la Antigüedad se ha sabido que esta relación es la misma para todos las circunferencias. El primer esfuerzo sistemático para hallar una aproximación numérica para π fue hecho por Arquímedes (hacia el año 240 a.C.), quien demostró que $\frac{22}{7} < \pi < \frac{223}{71}$ al hallar los perímetros de polígonos regulares inscritos y circunscritos alrededor de la circunferencia.



Hacia el año 480 a.C., el físico chino Tsu Ch'ung-chih dio la aproximación

$$\pi \approx \tfrac{355}{113} = 3.141592\ldots$$

que es correcta a seis lugares decimales. Esta estimación siguió siendo la más precisa de π hasta que el matemático holandés Adrianus Romanus (1593) utilizó polígonos con más de mil millones de lados para calcular π correcto a 15 lugares decimales. En el siglo XVII, los matemáticos empezaron a usar series infinitas e identidades trigonométricas en busca de π. El inglés William Shanks se pasó 15 años (1858-1873) usando estos métodos para calcular π a 707 decimales, pero en 1946 se encontró que sus cifras estaban erróneas empezando con el decimal 528. En la actualidad, con ayuda de computadoras, de manera rutinaria los matemáticos determinan π correcto a millones de lugares decimales. El récord actual es que π ha sido calculado a 2,576,980,370,000 (más de dos billones, 10^{12}) de lugares decimales por T. Daesuke y su equipo.

DEMOSTRACIÓN Las identidades recíprocas se siguen inmediatamente de las definiciones de la página 377. A continuación demostramos las identidades de Pitágoras. Por definición, $\cos t = x$ y $\operatorname{sen} t = y$, donde x y y son las coordenadas de un punto $P(x, y)$ en la circunferencia unitaria. Como $P(x, y)$ está en la circunferencia unitaria, tenemos que $x^2 + y^2 = 1$. Por lo tanto

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$$

Dividiendo ambos lados entre $\cos^2 t$ (siempre que $\cos t \neq 0$), obtenemos

$$\frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t} + \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t}$$

$$\left(\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}\right)^2 + 1 = \left(\frac{1}{\cos t}\right)^2$$

$$\tan^2 t + 1 = \sec^2 t$$

Hemos utilizado las identidades recíprocas $\operatorname{sen} t/\cos t = \tan t$ y $1/\cos t = \sec t$. Análogamente, dividiendo ambos lados de la primera identidad de Pitágoras entre $\operatorname{sen}^2 t$ (siempre que $\operatorname{sen} t \neq 0$) nos da $1 + \cot^2 t = \csc^2 t$. ■

Como sus nombres lo indican, las identidades fundamentales desempeñan un papel esencial en trigonometría porque podemos usarlas para relacionar cualquier función trigonométrica con cualquiera otra. Por lo tanto, si conocemos el valor de cualquiera de las funciones trigonométricas en t, entonces podemos hallar los valores de todas las otras en t.

EJEMPLO 5 | Hallar todas las funciones trigonométricas a partir del valor de una de ellas

Si $\cos t = \frac{3}{5}$ y t está en el cuarto cuadrante, encuentre los valores de todas las funciones trigonométricas en t.

SOLUCIÓN De las identidades de Pitágoras tenemos

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$\operatorname{sen}^2 t + \left(\tfrac{3}{5}\right)^2 = 1 \qquad \text{Sustituya } \cos t = \tfrac{3}{5}$$

$$\operatorname{sen}^2 t = 1 - \tfrac{9}{25} = \tfrac{16}{25} \qquad \text{Despeje } \operatorname{sen}^2 t$$

$$\operatorname{sen} t = \pm\tfrac{4}{5} \qquad \text{Tome raíces cuadradas}$$

Como este punto está en el cuarto cuadrante, $\operatorname{sen} t$ es negativo, de modo que $\operatorname{sen} t = -\frac{4}{5}$. Ahora que conocemos $\operatorname{sen} t$ y $\cos t$, podemos hallar los valores de las otras funciones trigonométricas usando las identidades recíprocas:

$$\operatorname{sen} t = -\frac{4}{5} \qquad \cos t = \frac{3}{5} \qquad \tan t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

$$\csc t = \frac{1}{\operatorname{sen} t} = -\frac{5}{4} \qquad \sec t = \frac{1}{\cos t} = \frac{5}{3} \qquad \cot t = \frac{1}{\tan t} = -\frac{3}{4}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **65** ■

EJEMPLO 6 | Escribir una función trigonométrica en términos de otra

Escriba $\tan t$ en términos de $\cos t$, donde t está en el tercer cuadrante.

SOLUCIÓN Como $\tan t = \operatorname{sen} t/\cos t$, necesitamos escribir sen t en términos de cos t. Por las identidades de Pitágoras tenemos

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$\operatorname{sen}^2 t = 1 - \cos^2 t \qquad \text{Despeje } \operatorname{sen}^2 t$$

$$\operatorname{sen} t = \pm\sqrt{1 - \cos^2 t} \qquad \text{Tome raíces cuadradas}$$

Como sen t es negativo en el tercer cuadrante, el signo negativo aplica aquí. Por lo tanto,

$$\tan t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} = \frac{-\sqrt{1 - \cos^2 t}}{\cos t}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **55**

5.2 EJERCICIOS

CONCEPTOS

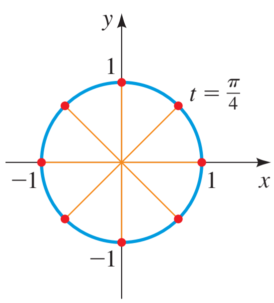
1. Sea $P(x, y)$ el punto terminal en la circunferencia unitaria determinado por t. Entonces sen t = ____, cos t = ____, y tan t = _____.

2. Si $P(x, y)$ está en la circunferencia unitaria, entonces $x^2 + y^2 =$ _____. Entonces, para toda t tenemos $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t =$ ______.

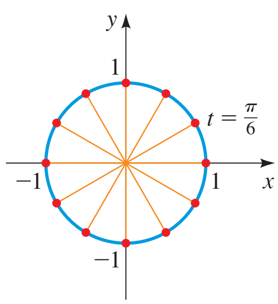
HABILIDADES

3–4 ■ Encuentre sen t y cos t para los valores de t cuyos puntos terminales se muestran en la circunferencia unitaria en la figura. En el ejercicio 3, t crece con incrementos de $\pi/4$; en el ejercicio 4, t aumenta con incrementos de $\pi/6$. (Vea los ejercicios 21 y 22 en la sección 5.1.)

3.



4.



5-24 ■ Encuentre el valor exacto de la función trigonométrica en el número real dado.

5. **(a)** $\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}$ **(b)** $\cos\frac{2\pi}{3}$ **(c)** $\tan\frac{2\pi}{3}$

6. **(a)** $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}$ **(b)** $\cos\frac{5\pi}{6}$ **(c)** $\tan\frac{5\pi}{6}$

7. **(a)** $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}$ **(b)** $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ **(c)** $\operatorname{sen}\frac{11\pi}{6}$

8. **(a)** $\cos\frac{5\pi}{3}$ **(b)** $\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$ **(c)** $\cos\frac{7\pi}{3}$

9. **(a)** $\cos\frac{3\pi}{4}$ **(b)** $\cos\frac{5\pi}{4}$ **(c)** $\cos\frac{7\pi}{4}$

10. **(a)** $\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}$ **(b)** $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}$ **(c)** $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}$

11. **(a)** $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{3}$ **(b)** $\csc\frac{7\pi}{3}$ **(c)** $\cot\frac{7\pi}{3}$

12. **(a)** $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ **(b)** $\sec\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ **(c)** $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

13. **(a)** $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ **(b)** $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ **(c)** $\cot\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

14. **(a)** $\operatorname{sen}\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$ **(b)** $\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$ **(c)** $\cot\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$

15. **(a)** $\sec\frac{11\pi}{3}$ **(b)** $\csc\frac{11\pi}{3}$ **(c)** $\sec\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

16. **(a)** $\cos\frac{7\pi}{6}$ **(b)** $\sec\frac{7\pi}{6}$ **(c)** $\csc\frac{7\pi}{6}$

17. **(a)** $\tan\frac{5\pi}{6}$ **(b)** $\tan\frac{7\pi}{6}$ **(c)** $\tan\frac{11\pi}{6}$

18. **(a)** $\cot\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ **(b)** $\cot\frac{2\pi}{3}$ **(c)** $\cot\frac{5\pi}{3}$

19. **(a)** $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ **(b)** $\csc\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ **(c)** $\cot\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

20. **(a)** $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}$ **(b)** $\sec\frac{5\pi}{4}$ **(c)** $\tan\frac{5\pi}{4}$

21. **(a)** $\csc\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ **(b)** $\csc\frac{\pi}{2}$ **(c)** $\csc\frac{3\pi}{2}$

22. **(a)** $\sec(-\pi)$ **(b)** $\sec\pi$ **(c)** $\sec 4\pi$

23. **(a)** $\operatorname{sen} 13\pi$ **(b)** $\cos 14\pi$ **(c)** $\tan 15\pi$

24. **(a)** $\operatorname{sen}\frac{25\pi}{2}$ **(b)** $\cos\frac{25\pi}{2}$ **(c)** $\cot\frac{25\pi}{2}$

25-28 ■ Encuentre el valor de cada una de las seis funciones trigonométricas (si está definido) en el número real t dado. Use sus respuestas para completar la tabla.

25. $t = 0$ **26.** $t = \frac{\pi}{2}$ **27.** $t = \pi$ **28.** $t = \frac{3\pi}{2}$

t	sen t	cos t	tan t	csc t	sec t	cot t
0	0	1		indefinido		
$\frac{\pi}{2}$						
π			0			indefinido
$\frac{3\pi}{2}$						

29-38 ■ Nos dan el punto terminal $P(x, y)$ determinado por un número real t. Encuentre sen t, cos t y tan t.

29. $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ **30.** $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

31. $\left(\frac{\sqrt{5}}{4}, -\frac{\sqrt{11}}{4}\right)$ **32.** $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

33. $\left(-\frac{6}{7}, \frac{\sqrt{13}}{7}\right)$ **34.** $\left(\frac{40}{41}, \frac{9}{41}\right)$

35. $\left(-\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right)$ **36.** $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

37. $\left(-\frac{20}{29}, \frac{21}{29}\right)$ **38.** $\left(\frac{24}{25}, -\frac{7}{25}\right)$

39-46 ■ Encuentre un valor aproximado de la función trigonométrica dada usando **(a)** la figura y **(b)** una calculadora. Compare los dos resultados.

39. sen 1

40. cos 0.8

41. sen 1.2

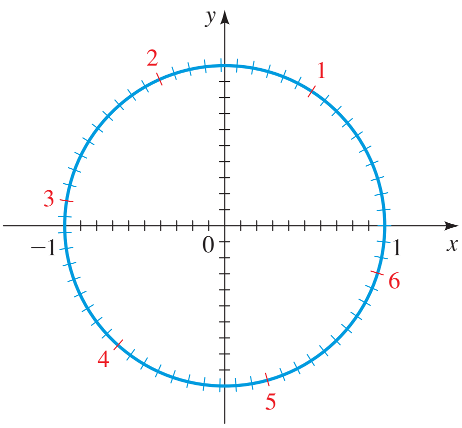
42. cos 5

43. tan 0.8

44. tan(−1.3)

45. cos 4.1

46. sen(−5.2)



47-50 ■ Encuentre el signo de la expresión si el punto terminal determinado por t está en el cuadrante dado.

47. sen t cos t, Cuadrante II **48.** tan t sec t, Cuadrante IV

49. $\frac{\tan t \operatorname{sen} t}{\cot t}$, Cuadrante III **50.** cos t sec t, cualquier cuadrante

51-54 ■ De la información dada, encuentre el cuadrante en el que se encuentre el punto terminal determinado por t.

51. sen $t > 0$ y cos $t < 0$ **52.** tan $t > 0$ y sen $t < 0$

53. csc $t > 0$ y sec $t < 0$ **54.** cos $t < 0$ y cot $t < 0$

55-64 ■ Escriba la primera expresión en términos de la segunda si el punto terminal determinado por t está en el cuadrante dado.

55. sen t, cos t; Cuadrante II **56.** cos t, sen t; Cuadrante IV

57. tan t, sen t; Cuadrante IV **58.** tan t, cos t; Cuadrante III

59. sec t, tan t; Cuadrante II **60.** csc t, cot t; Cuadrante III

61. tan t, sec t; Cuadrante III **62.** sen t, sec t; Cuadrante IV

63. $\tan^2 t$, sen t; cualquier cuadrante

64. $\sec^2 t \operatorname{sen}^2 t$, cos t; cualquier cuadrante

65-72 ■ Encuentre los valores de las funciones trigonométricas de t a partir de la información dada.

65. sen $t = \frac{3}{5}$, el punto terminal de t está en el cuadrante II

66. cos $t = -\frac{4}{5}$, el punto terminal de t está en el cuadrante III

67. sec $t = 3$, el punto terminal de t está en el cuadrante IV

68. tan $t = \frac{1}{4}$, el punto terminal de t está en el cuadrante III

69. tan $t = -\frac{3}{4}$, cos $t > 0$

70. sec $t = 2$, sen $t < 0$

71. sen $t = -\frac{1}{4}$, sec $t < 0$

72. tan $t = -4$, csc $t > 0$

73-80 ■ Determine si la función es par, impar o ninguna de éstas.

73. $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$ **74.** $f(x) = x^2 \cos 2x$

75. $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$ **76.** $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$

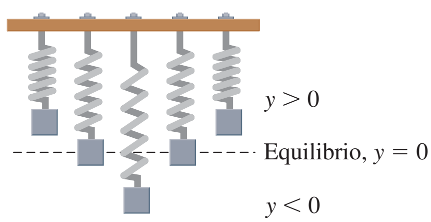
77. $f(x) = |x| \cos x$ **78.** $f(x) = x \operatorname{sen}^3 x$

79. $f(x) = x^3 + \cos x$ **80.** $f(x) = \cos(\operatorname{sen} x)$

APLICACIONES

81. Movimiento armónico El desplazamiento a partir del equilibrio de una masa oscilante unida a un resorte está dado por $y(t) = 4 \cos 3\pi t$, donde y se mide en pulgadas y t en segundos. Encuentre el desplazamiento en los tiempos indicados en la tabla.

t	$y(t)$
0	
0.25	
0.50	
0.75	
1.00	
1.25	



82. Ritmos circadianos Nuestra presión sanguínea varía en el curso del día. En cierta persona, la presión diastólica en reposo en el tiempo t está dada por $B(t) = 80 + 7 \operatorname{sen}(\pi t/12)$, donde t se mide en horas desde la medianoche y $B(t)$ en mmHg (milímetros de mercurio). Encuentre la presión sanguínea de esta persona a las

(a) 6:00 a.m. **(b)** 10:30 a.m. **(c)** Mediodía **(d)** 8:00 p.m.