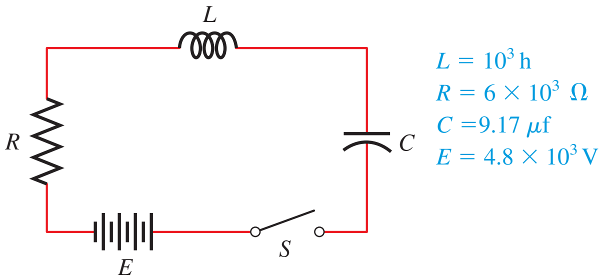
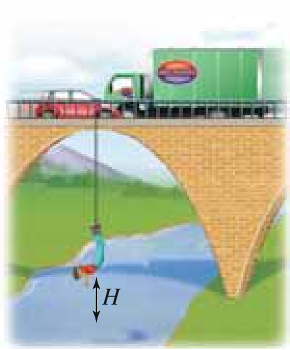
83. Circuito eléctrico Después de cerrar el interruptor del circuito mostrado, la corriente t segundos más tarde es $I(t) = 0.8e^{-3t}$ sen $10t$. Encuentre la corriente en los tiempos **(a)** $t = 0.1$ s y **(b)** $t = 0.5$ s.



84. Salto en bungee Una saltadora de cuerda elástica (llamada *bungee*) se deja caer desde un elevado puente hasta el río y luego rebota una y otra vez. En el tiempo t segundos después de su salto, su altura H (en metros) sobre el río está dada por $H(t) = 100 + 75e^{-t/20}\cos(\frac{\pi}{4}t)$. Encuentre la altura en que se encuentre ella en los tiempos indicados en la tabla.

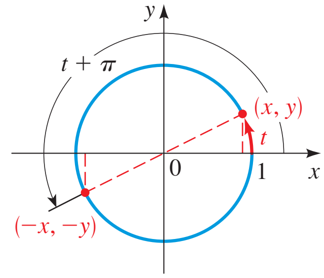
t	$H(t)$
0	
1	
2	
4	
6	
8	
12	



DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

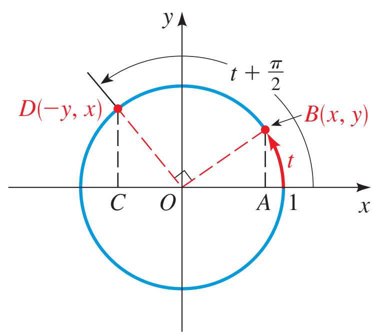
85. Fórmulas de reducción Una *fórmula de reducción* es aquella que se puede usar para "reducir" el número de términos en la entrada para una función trigonométrica. Explique usted la forma en que la figura muestra que son válidas las fórmulas de reducción siguientes:

$$\operatorname{sen}(t+\pi) = -\operatorname{sen} t \qquad \cos(t+\pi) = -\cos t$$
$$\tan(t+\pi) = \tan t$$



86. Más fórmulas de reducción: Por el teorema de "ángulo-lado-ángulo" de geometría elemental, los triángulos CDO y AOB de la figura siguiente son congruentes. Explique la forma en que esto demuestra que si B tiene coordenadas (x, y), entonces D tiene coordenadas $(-y, x)$. A continuación, explique cómo es que la figura muestra que las fórmulas de reducción siguientes son válidas:

$$\operatorname{sen}\left(t+\frac{\pi}{2}\right) = \cos t$$
$$\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} t$$
$$\tan\left(t+\frac{\pi}{2}\right) = -\cot t$$



5.3 GRÁFICAS TRIGONOMÉTRICAS

Gráficas de las funciones seno y coseno ▶ Gráficas de transformaciones de las funciones seno y coseno ▶ Uso de calculadoras graficadoras para graficar funciones trigonométricas

La gráfica de una función nos da una mejor idea de su comportamiento. Entonces, en esta sección graficamos las funciones seno y coseno y ciertas transformaciones de estas funciones. Las otras funciones trigonométricas se grafican en la sección siguiente.

▼ Gráficas de las funciones seno y coseno

Para ayudarnos a graficar las funciones seno y coseno, primero observamos que estas funciones repiten sus valores en forma regular. Para ver exactamente cómo ocurre esto, recuerde que la circunferencia del círculo unitario es 2π. Se deduce que el punto terminal $P(x, y)$ determinado por el número real t es el mismo que el determinado por $t + 2\pi$. Como las funciones seno y coseno están en términos de las coordenadas de $P(x, y)$, se deduce que sus valores no cambian con la adición de cualquier múltiplo entero de 2π. En otras palabras,

$$\operatorname{sen}(t + 2n\pi) = \operatorname{sen} t \qquad \text{para cualquier entero } n$$

$$\cos(t + 2n\pi) = \cos t \qquad \text{para cualquier entero } n$$

Entonces, las funciones seno y coseno son *periódicas* de acuerdo con la siguiente definición: Una función f es **periódica** si hay un número positivo p tal que $f(t + p) = f(t)$ para toda t. El mínimo de tal número positivo (si existe) es el **período** de f. Si f tiene período p, entonces la gráfica de f en cualquier intervalo de longitud p se denomina **período completo** de f.

PROPIEDADES PERIÓDICAS DE LAS FUNCIONES SENO Y COSENO

Las funciones seno y coseno tienen período 2π:

$$\operatorname{sen}(t + 2\pi) = \operatorname{sen} t \qquad \cos(t + 2\pi) = \cos t$$

TABLA 1

t	**sen t**	**cos t**
$0 \to \frac{\pi}{2}$	$0 \to 1$	$1 \to 0$
$\frac{\pi}{2} \to \pi$	$1 \to 0$	$0 \to -1$
$\pi \to \frac{3\pi}{2}$	$0 \to -1$	$-1 \to 0$
$\frac{3\pi}{2} \to 2\pi$	$-1 \to 0$	$0 \to 1$

Entonces las funciones seno y coseno repiten sus valores en cualquier intervalo de longitud 2π. Para trazar sus gráficas, primero graficamos un período. Para trazar las gráficas sobre el intervalo $0 \le t \le 2\pi$, podríamos tratar de hacer una tabla de valores y usar esos puntos para trazar la gráfica. Como no se puede completar dicha tabla, veamos más de cerca las definiciones de estas funciones.

Recuerde que sen t es la coordenada y del punto terminal $P(x, y)$ en la circunferencia unitaria determinado por el número real t. ¿Cómo varía la coordenada y de este punto cuando t aumenta? Es fácil ver que la coordenada y de $P(x, y)$ aumenta a 1, luego disminuye a -1 repetidamente cuando el punto $P(x, y)$ se mueve alrededor del círculo unitario. (Vea Figura 1.) De hecho, cuando t aumenta de 0 a $\pi/2$, $y = \operatorname{sen} t$ aumenta de 0 a 1. Cuando t aumenta de $\pi/2$ a π, el valor de $y = \operatorname{sen} t$ disminuye de 1 a 0. La Tabla 1 muestra la variación de las funciones seno y coseno para t entre 0 y 2π.

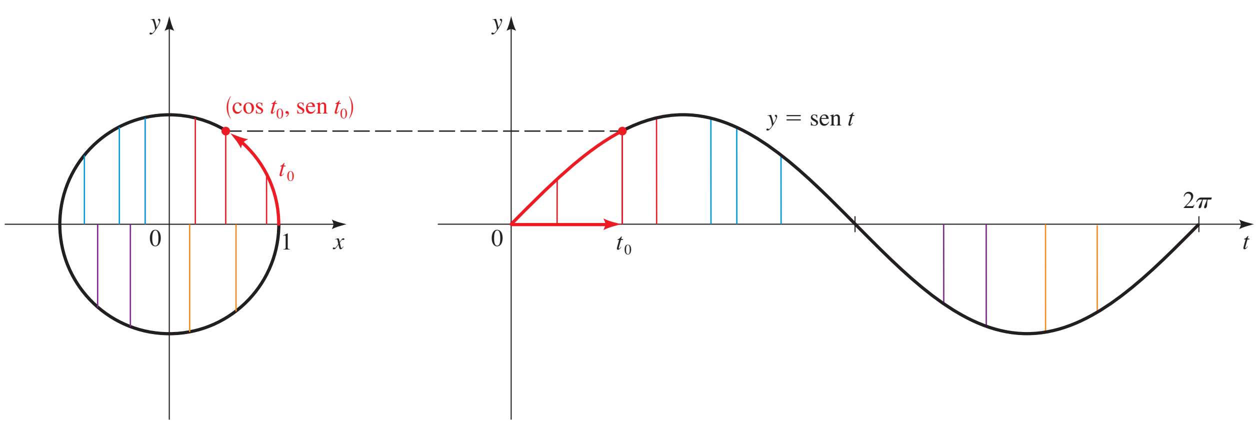


FIGURA 1

Para trazar las gráficas en forma más precisa, encontramos otros pocos valores de sen t y cos t en la Tabla 2. Podríamos también hallar otros valores con ayuda de una calculadora.

TABLA 2

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sen t	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos t	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

A continuación usamos esta información para graficar las funciones sen t y cos t para t entre 0 y 2π en las Figuras 2 y 3. Éstas son las gráficas de un período. Usando el dato de que estas funciones son periódicas con período 2π, obtenemos sus gráficas completas al continuar la misma configuración a la izquierda y a la derecha en cada intervalo sucesivo de longitud 2π.

La gráfica de la función seno es simétrica con respecto al origen. Esto es como se esperaba, porque la función seno es una función impar. Como la función coseno es una función par, su gráfica es simétrica con respecto al eje y.

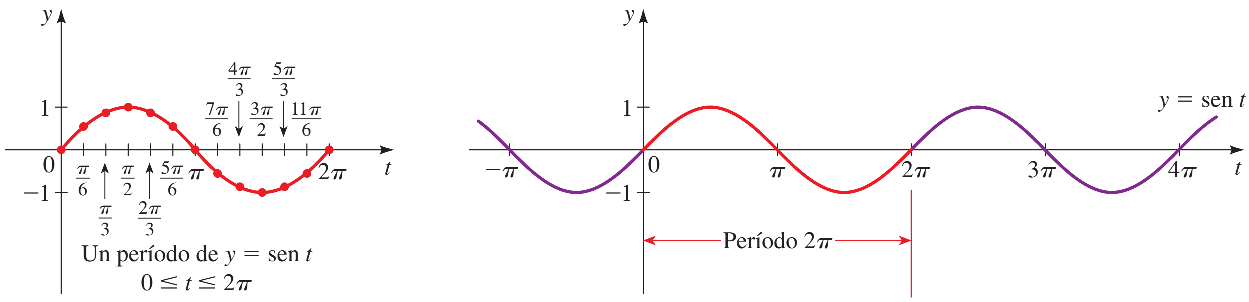


FIGURA 2 Gráfica de sen t

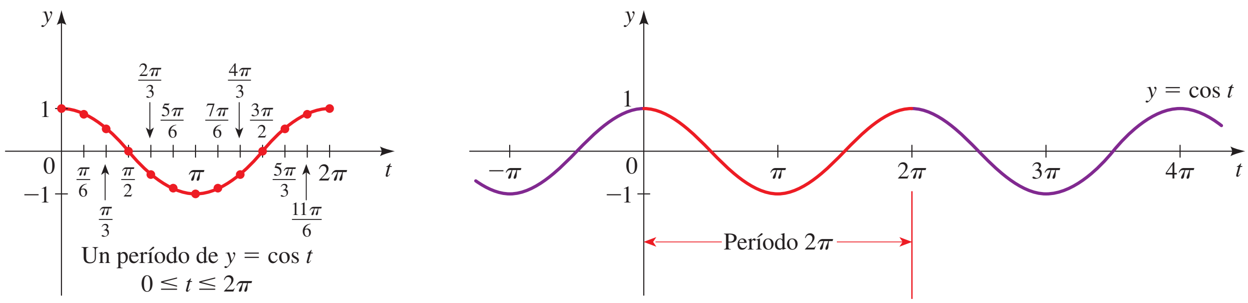


FIGURA 3 Gráfica de cos t

Gráficas de transformaciones de las funciones seno y coseno

A continuación consideramos gráficas de funciones que son transformaciones de las funciones seno y coseno. Entonces, las técnicas para graficar de la Sección 2.5 son muy útiles aquí. Las gráficas que obtenemos son importantes para entender aplicaciones a situaciones físicas tales como movimiento armónico (vea Sección 5.6), pero algunas de ellas son gráficas de atractivo aspecto que son interesantes por sí solas.

Es tradicional usar la letra x para denotar la variable del dominio de una función. Por lo tanto, de aquí en adelante usamos la letra x y escribimos $y = \text{sen } x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$ y así sucesivamente para denotar estas funciones.

EJEMPLO 1 | Curvas de coseno

Trace la gráfica de cada función siguiente.

(a) $f(x) = 2 + \cos x$ **(b)** $g(x) = -\cos x$

SOLUCIÓN

(a) La gráfica de $y = 2 + \cos x$ es la misma que la gráfica de $y = \cos x$, pero desplazada 2 unidades (vea Figura 4(a)).

(b) La gráfica de $y = -\cos x$ en la Figura 4(b) es la reflexión de la gráfica de $y = \cos x$ en el eje x.

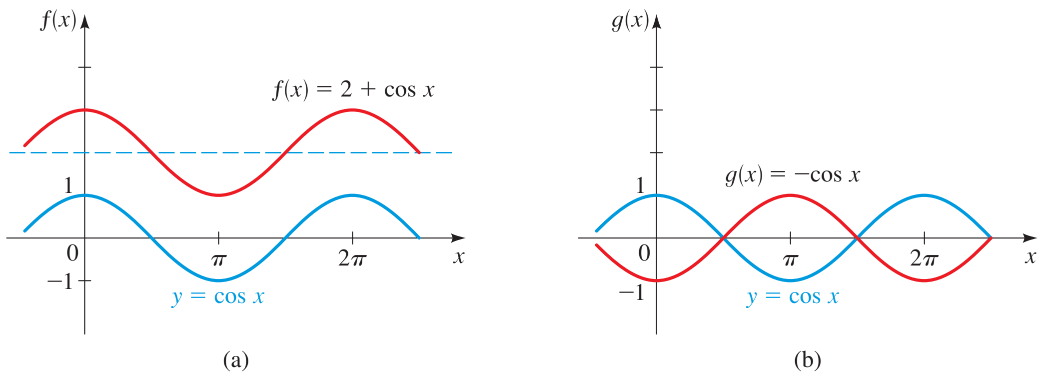


FIGURA 4

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **3** Y **5**

Grafiquemos $y = 2 \text{ sen } x$. Empezamos con la gráfica de $y = \text{sen } x$ y multiplicamos por 2 la coordenada y de cada punto. Esto tiene el efecto de alargar verticalmente la gráfica en un factor de 2. Para graficar $y = \frac{1}{2} \text{ sen } x$, empezamos con la gráfica de $y = \text{sen } x$ y multiplicamos por $\frac{1}{2}$ la coordenada y de cada punto. Esto tiene el efecto de contraer verticalmente la gráfica en un factor de $\frac{1}{2}$ (vea Figura 5).

El alargamiento y contracción de gráficas se estudia en la Sección 2.5.

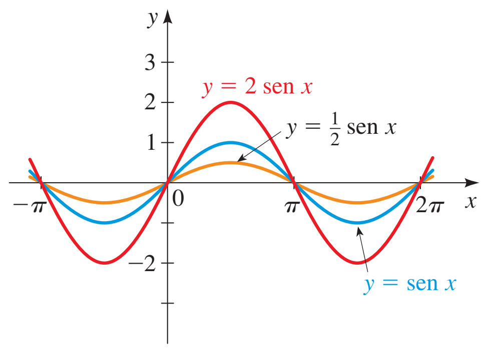


FIGURA 5

En general, para las funciones

$$y = a \text{ sen } x \qquad \text{y} \qquad y = a \cos x$$

el número $|a|$ se denomina **amplitud** y es el valor más grande que estas funciones alcanzan. En la Figura 6 se ilustran gráficas de $y = a \text{ sen } x$ para varios valores de a.

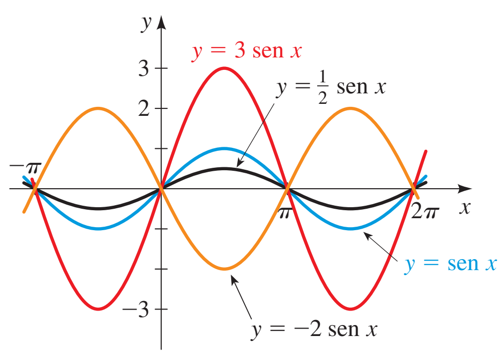


FIGURA 6

EJEMPLO 2 | Alargar una curva coseno

Encuentre la amplitud de $y = -3 \cos x$ y trace su gráfica.

SOLUCIÓN La amplitud es $|-3| = 3$, de modo que el valor más grande que la gráfica alcanza es 3 y el valor más pequeño es -3. Para trazar la gráfica, empezamos con la gráfica de $y = \cos x$, alargamos verticalmente la gráfica en un factor de 3 y reflejamos en el eje x, llegando a la gráfica de la Figura 7.

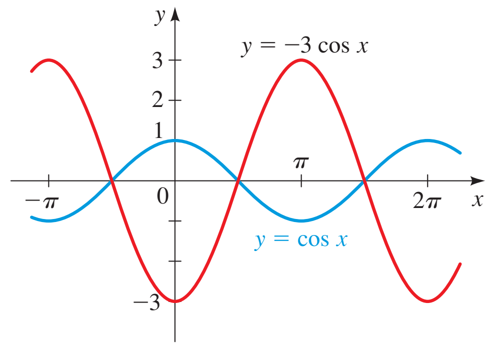


FIGURA 7

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 9

Como las funciones seno y coseno tienen períodos 2π, las funciones

$$y = a \operatorname{sen} kx \qquad \text{y} \qquad y = a \cos kx \qquad (k > 0)$$

completan un período cuando kx varía de 0 a 2π, es decir, para $0 \le kx \le 2\pi$ o para $0 \le x \le 2\pi/k$. Entonces estas funciones completan un período cuando x varía entre 0 y $2\pi/k$ y por lo tanto tienen período $2\pi/k$. Las gráficas de estas funciones se denominan **curvas seno** y **curvas coseno**, respectivamente. (En forma colectiva, las curvas sinusoidales y las cosenoidales se conocen como curvas **sinusoidales**.

CURVAS SENO Y COSENO

Las curvas seno y coseno

$$y = a \operatorname{sen} kx \qquad \text{y} \qquad y = a \cos kx \qquad (k > 0)$$

tienen **amplitud** $|a|$ y **período** $2\pi/k$.

Un intervalo apropiado en el cual graficar un período completo es $[0, 2\pi/k]$.

Para ver cómo afecta el valor de k a la gráfica de $y = \operatorname{sen} kx$, grafiquemos la curva seno $y = \operatorname{sen} 2x$. Como el período es $2\pi/2 = \pi$, la gráfica completa un período en el intervalo $0 \le x \le \pi$ (vea Figura 8(a)). Para la curva seno $y = \operatorname{sen} \frac{1}{2}x$, el período es $2\pi \div \frac{1}{2} = 4\pi$, de modo que la gráfica completa un período en el intervalo $0 \le x \le 4\pi$ (vea Figura 8(b)). Vemos que el efecto es *contraer* la gráfica horizontalmente si $k > 1$ o *alargar* la gráfica horizontalmente si $k < 1$.

El alargamiento y contracción de gráficas se estudia en la Sección 2.5.

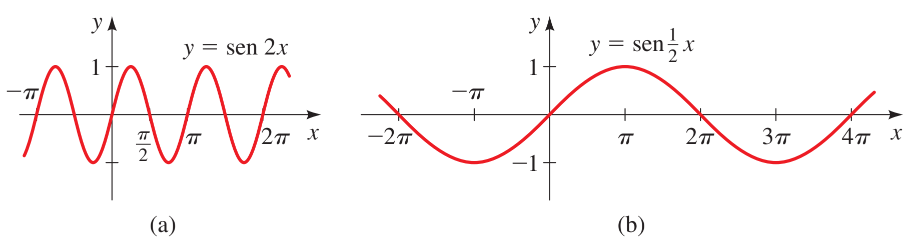


FIGURA 8

Por comparación, en la Figura 9 mostramos las gráficas de un período de la curva seno $y = a \text{ sen } kx$ para varios valores de k.

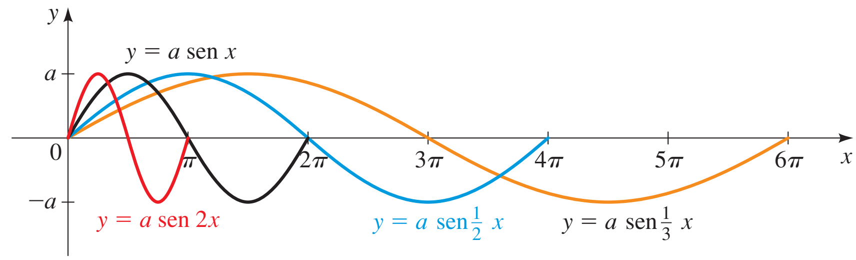


FIGURA 9

EJEMPLO 3 | Amplitud y período

Encuentre la amplitud y período de cada función y trace su gráfica.

(a) $y = 4 \cos 3x$ **(b)** $y = -2 \text{ sen } \frac{1}{2}x$

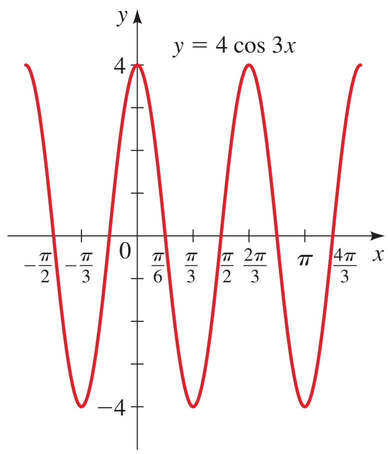


FIGURA 10

SOLUCIÓN

(a) Obtenemos la amplitud y período a partir de la forma de la función como sigue:

$$\boxed{\text{amplitud} = |a| = 4}$$

$$y = 4 \cos 3x$$

$$\boxed{\text{período} = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{3}}$$

La amplitud es 4 y el período es $2\pi/3$. La gráfica se ilustra en la Figura 10.

(b) Para $y = -2 \text{ sen } \frac{1}{2}x$,

$$\text{amplitud} = |a| = |-2| = 2$$

$$\text{período} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

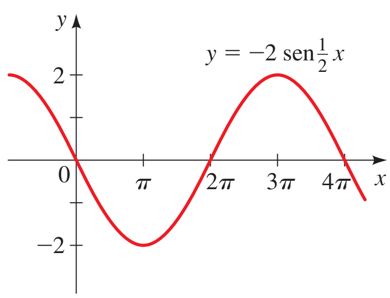


FIGURA 11

La gráfica está en la Figura 11.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **19** Y **21**

Las gráficas de funciones de la forma $y = a \text{ sen } k(x - b)$ y $y = a \cos k(x - b)$ son simplemente curvas seno y coseno desplazadas horizontalmente en una cantidad $|b|$. Se desplazan a la derecha si $b > 0$ o a la izquierda si $b < 0$. El número b es el *desfase*. Resumimos las propiedades de estas funciones en el recuadro siguiente.

CURVAS SENO Y COSENO DESPLAZADAS

Las curvas sinusoidales y cosenoidales

$$y = a \text{ sen } k(x - b) \qquad \text{y} \qquad y = a \cos k(x - b) \qquad (k > 0)$$

tienen **amplitud** $|a|$, **período** $2\pi/k$, y **desfase** b.

Un intervalo apropiado sobre el cual graficar un período completo es $[b, b + (2\pi/k)]$.

Las gráficas de $y = \operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ y $y = \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$ se muestran en la Figura 12.

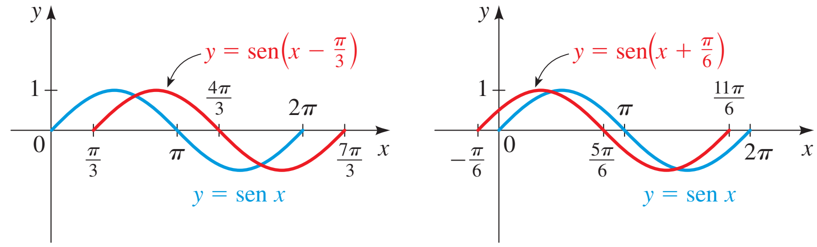


FIGURA 12

EJEMPLO 4 | Una curva seno desplazada

Encuentre la amplitud, período y desfase de $y = 3 \operatorname{sen} 2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$, y grafique un período completo.

SOLUCIÓN Obtenemos la amplitud, período y desfase de la forma de la función como sigue:

$$\boxed{\text{amplitud} = |a| = 3,} \quad \boxed{\text{período} = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2} = \pi}$$

$$y = 3 \operatorname{sen} 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\boxed{\text{desfase} = \frac{\pi}{4} \text{ (a la derecha)}}$$

Veamos ahora otra forma de hallar un intervalo apropiado sobre el cual graficar un período completo. Como el período de $y = \operatorname{sen} x$ es 2π, la función $y = 3 \operatorname{sen} 2(x - \frac{\pi}{4})$ pasará por un período completo a medida que $2(x - \frac{\pi}{4})$ varíe de 0 a 2π.

Inicio de período	Fin de período:
$2(x - \frac{\pi}{4}) = 0$	$2(x - \frac{\pi}{4}) = 2\pi$
$x - \frac{\pi}{4} = 0$	$x - \frac{\pi}{4} = \pi$
$x = \frac{\pi}{4}$	$x = \frac{5\pi}{4}$

Entonces, graficamos un período sobre el intervalo $[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$..

Como el desfase es $\pi/4$ y el período es π, un período completo ocurre sobre el intervalo

$$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + \pi\right] = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$$

Como ayuda para trazar la gráfica, dividimos este intervalo en cuatro partes iguales y a continuación graficamos una curva seno con amplitud 3, como en la Figura 13.

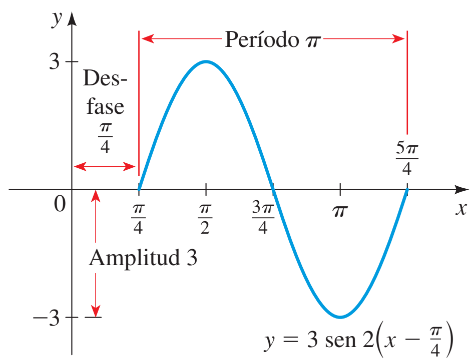


FIGURA 13

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 33

EJEMPLO 5 | Curva coseno desplazada

Encuentre la amplitud, período y desfase de

$$y = \frac{3}{4} \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$$

y grafique un período completo.

SOLUCIÓN Primero escribimos esta función en la forma $y = a \cos k(x - b)$. Para hacer esto, factorizamos 2 de la expresión $2x + \frac{2\pi}{3}$ para obtener

$$y = \frac{3}{4}\cos 2\left[x - \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

Por lo tanto, tenemos

$$\text{amplitud} = |a| = \frac{3}{4}$$

$$\text{período} = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$\text{desfase} = b = -\frac{\pi}{3} \qquad \text{Desfase } \frac{\pi}{3} \text{ a la } \textit{izquierda}$$

Podemos encontrar un período completo, como sigue:

Inicio del período:	Fin del período:
$2x + \frac{2\pi}{3} = 0$	$2x + \frac{2\pi}{3} = 2\pi$
$2x = -\frac{2\pi}{3}$	$2x = \frac{4\pi}{3}$
$x = -\frac{\pi}{3}$	$x = \frac{2\pi}{3}$

De este modo podemos graficar un período sobre el intervalo $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

A partir de esta información tenemos que un período de esta curva coseno comienza y termina en $-\pi/3$. Para trazar la gráfica sobre el intervalo, éste lo dividimos en cuatro partes iguales y graficamos la curva coseno con amplitud como se muestra en la Figura 14.

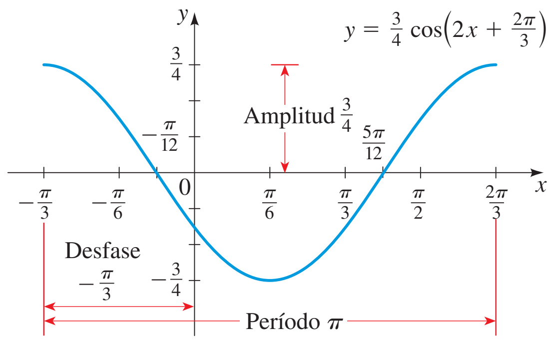


FIGURA 14

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **35**

Uso de calculadoras graficadoras para graficar funciones trigonométricas

Vea en la Sección 1.9 las guías sobre cómo seleccionar un rectángulo de vista apropiado.

Cuando use una calculadora graficadora o computadora para graficar una función, es importante escoger cuidadosamente el rectángulo de vista para producir una gráfica razonable de la función. Esto es en especial verdadero para funciones trigonométricas; el siguiente ejemplo muestra que, si no se tiene cuidado, es fácil producir una gráfica engañosa de una función trigonométrica.

EJEMPLO 6 | Selección de un rectángulo de vista

Grafique la función $f(x) = \text{sen}\, 50x$ en un rectángulo de vista apropiado.

El aspecto de las gráficas de la Figura 15 depende de la máquina que se use. Las gráficas que el lector obtenga con su calculadora graficadora podrían no parecerse a estas figuras, pero también serán bastante imprecisas.

SOLUCIÓN La Figura 15(a) muestra la gráfica de f producida por una calculadora graficadora usando el rectángulo de vista $[-12, 12]$ por $[-1.5, 1.5]$. A primera vista la gráfica parece ser razonable, pero si cambiamos el rectángulo de vista a los que aparecen en la Figura 15, las gráficas se verán muy diferentes. Algo extraño está pasando.

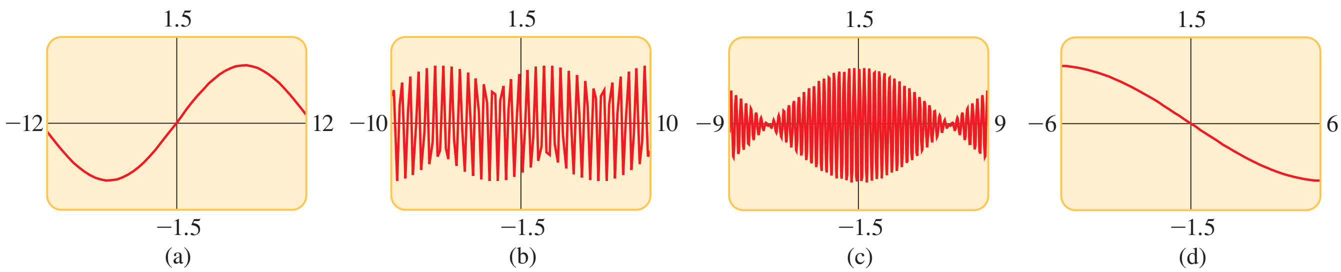
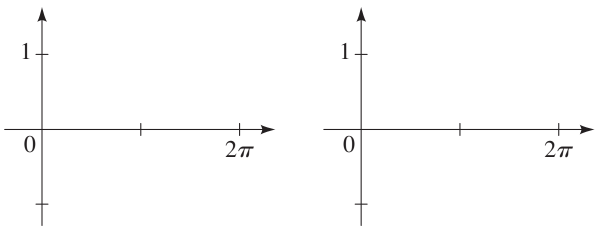


FIGURA 15 Gráficas de $f(x) = \text{sen}\, 50x$ en diferentes rectángulos de vista.

5.3 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Las funciones trigonométricas $y = \text{sen } x$ y $y = \cos x$ tienen amplitud ____y período _____. Trace una gráfica de cada función en el intervalo $|2\pi|$.



2. La función trigonométrica $y = 3 \text{ sen } 2x$ tiene amplitud______ y período _______.

HABILIDADES

3-16 ■ Grafique la función.

3. $f(x) = 1 + \cos x$
4. $f(x) = 3 + \text{sen } x$
5. $f(x) = -\text{sen } x$
6. $f(x) = 2 - \cos x$
7. $f(x) = -2 + \text{sen } x$
8. $f(x) = -1 + \cos x$
9. $g(x) = 3 \cos x$
10. $g(x) = 2 \text{ sen } x$
11. $g(x) = -\frac{1}{2} \text{ sen } x$
12. $g(x) = -\frac{2}{3} \cos x$
13. $g(x) = 3 + 3 \cos x$
14. $g(x) = 4 - 2 \text{ sen } x$
15. $h(x) = |\cos x|$
16. $h(x) = |\text{sen } x|$

17-28 ■ Encuentre la amplitud y período de la función, y trace su gráfica.

17. $y = \cos 2x$
18. $y = -\text{sen } 2x$
19. $y = -3 \text{ sen } 3x$
20. $y = \frac{1}{2} \cos 4x$
21. $y = 10 \text{ sen } \frac{1}{2}x$
22. $y = 5 \cos \frac{1}{4}x$
23. $y = -\frac{1}{3} \cos \frac{1}{3}x$
24. $y = 4 \text{ sen}(-2x)$
25. $y = -2 \text{ sen } 2\pi x$
26. $y = -3 \text{ sen } \pi x$
27. $y = 1 + \frac{1}{2} \cos \pi x$
28. $y = -2 + \cos 4\pi x$

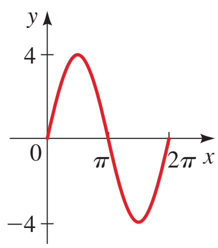
29-42 ■ Encuentre la amplitud, período y desfase de la función, y grafique un período completo.

29. $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$
30. $y = 2 \text{ sen}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$
31. $y = -2 \text{ sen}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$
32. $y = 3 \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$
33. $y = -4 \text{ sen } 2\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$
34. $y = \text{sen } \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$
35. $y = 5 \cos\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right)$
36. $y = 2 \text{ sen}\left(\dfrac{2}{3}x - \dfrac{\pi}{6}\right)$
37. $y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$
38. $y = 1 + \cos\left(3x + \dfrac{\pi}{2}\right)$
39. $y = 3 \cos \pi(x + \frac{1}{2})$
40. $y = 3 + 2 \text{ sen } 3(x + 1)$
41. $y = \text{sen}(\pi + 3x)$
42. $y = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$

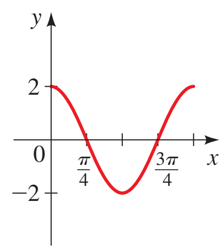
43-50 ■ Nos dan la gráfica de un período completo de una curva seno o coseno.
(a) Encuentre la amplitud, período y desfase.
(b) Escriba una ecuación que represente la curva en la forma

$$y = a \text{ sen } k(x - b) \qquad \text{o} \qquad y = a \cos k(x - b)$$

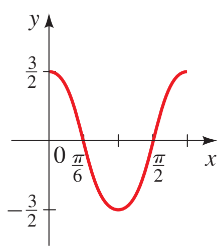
43.



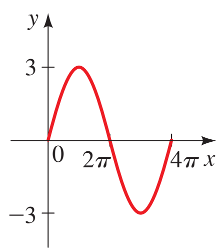
44.



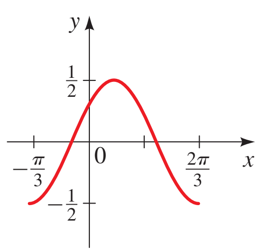
45.



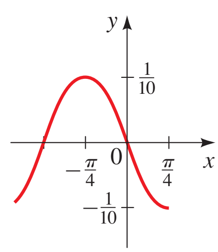
46.



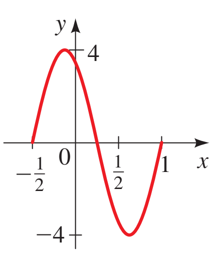
47.



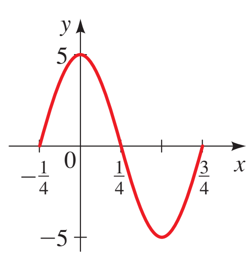
48.



49.



50.



51-58 ■ Determine un rectángulo de vista apropiado para cada función, y úselo para trazar la gráfica.

51. $f(x) = \cos 100x$
52. $f(x) = 3 \text{ sen } 120x$
53. $f(x) = \text{sen}(x/40)$
54. $f(x) = \cos(x/80)$
55. $y = \tan 25x$
56. $y = \csc 40x$
57. $y = \text{sen}^2 20x$
58. $y = \sqrt{\tan 10\pi x}$