6.1 MEDIDA DE UN ÁNGULO

Medida de un ángulo ▶ Ángulos en posición normal ▶ Longitud de un arco de circunferencia ▶ Área de un sector circular ▶ Movimiento circular

Un **ángulo** AOB está formado por dos rayos R_1 y R_2 con un vértice común O (vea Figura 1). Con frecuencia interpretamos un ángulo como una rotación del rayo R_1 sobre R_2. En este caso, R_1 recibe el nombre de **lado inicial** y R_2 es el **lado terminal** del ángulo. Si la rotación es en el sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj, el ángulo es considerado como **positivo** y, si es en el sentido de las manecillas del reloj, el ángulo es considerado como **negativo**.

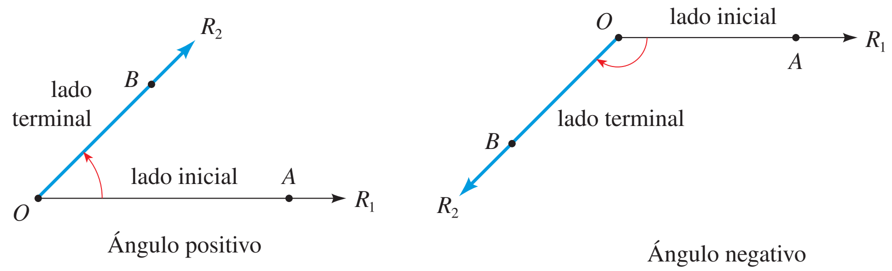


FIGURA 1

▼ Medida de un ángulo

La **medida** de un ángulo es la cantidad de rotación alrededor del vértice para mover R_1 sobre R_2. Intuitivamente, esto es cuánto es lo que "abre" el ángulo. Una unidad de medida para ángulos es el **grado**. Un ángulo de medida 1 grado se forma al girar el lado inicial $\frac{1}{360}$ de una revolución completa. En cálculo y otras ramas de matemáticas, se usa un método más natural de medir ángulos y es la *medida en radianes.* La cantidad que abre un ángulo se mide a lo largo del arco de una circunferencia de radio 1 con su centro en el vértice del ángulo.

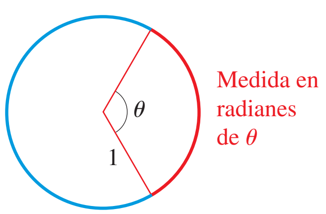


FIGURA 2

DEFINICIÓN DE MEDIDA EN RADIÁN

Si un círculo de radio 1 se traza con el vértice de un ángulo en su centro, entonces la medida de este ángulo en **radianes** (abreviado **rad**) es la longitud del arco que subtiende el ángulo (vea Figura 2).

La circunferencia del círculo de radio 1 es 2π y, por lo tanto, una revolución completa tiene medida 2π rad, un ángulo llano tiene una medida π rad, y un ángulo recto tiene medida $\pi/2$ rad. Un ángulo que esté subtendido por un arco de longitud 2 a lo largo de la circunferencia unitaria tiene medida 2 en radianes (vea Figura 3).

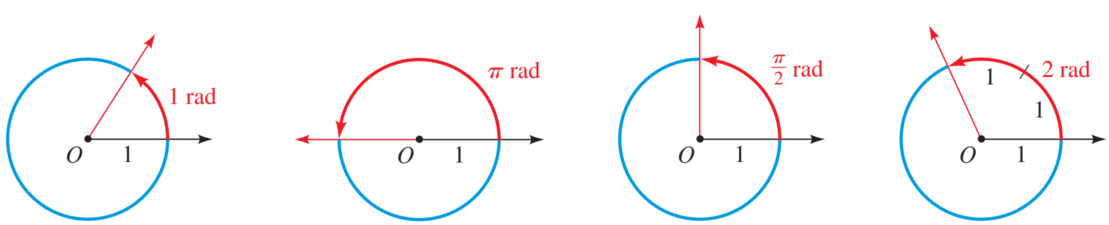


FIGURA 3 Medida en radianes

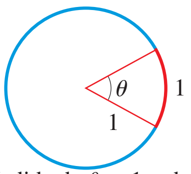
Como una revolución completa medida en grados es 360° y medida en radianes es 2π rad, obtenemos la siguiente y sencilla relación entre estos dos métodos de medición de ángulos.

RELACIÓN ENTRE GRADOS Y RADIANES

$$180° = \pi \text{ rad} \qquad 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \qquad 1° = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

1. Para convertir grados a radianes, multiplique por $\dfrac{\pi}{180}$.

2. Para convertir radianes a grados, multiplique por $\dfrac{180}{\pi}$.



Medida de $\theta = 1$ rad
Medida de $\theta \approx 57.296°$

FIGURA 4

Para tener alguna idea del tamaño de 1 radián, observe que

$$1 \text{ rad} \approx 57.296° \qquad \text{y} \qquad 1° \approx 0.01745 \text{ rad}$$

Un ángulo θ de medida 1 radián se muestra en la Figura 4.

EJEMPLO 1 | Convertir entre radianes y grados

(a) Exprese 60° en radianes. **(b)** Exprese $\dfrac{\pi}{6}$ rad en grados.

SOLUCIÓN La relación entre grados y radianes da

(a) $60° = 60\left(\dfrac{\pi}{180}\right) \text{ rad} = \dfrac{\pi}{3} \text{ rad}$ **(b)** $\dfrac{\pi}{6} \text{ rad} = \left(\dfrac{\pi}{6}\right)\left(\dfrac{180}{\pi}\right) = 30°$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **3** Y **15**

Una nota de terminología: A veces usamos frases como "un ángulo de 30°" para querer decir *un ángulo cuya medida es 30°*. También, para un ángulo θ, escribimos $\theta = 30°$ o $\theta = \pi/6$ para querer decir que *la medida de* θ *es* 30° *o* $\pi/6$ *rad*. Cuando no se da una unidad, se supone que el ángulo se mide en radianes.

Ángulos en posición normal

Un ángulo está en **posición normal** si está trazado en el plano xy con su vértice en el origen y su lado inicial en el eje positivo x. La Figura 5 da ejemplos de ángulos en posición normal.

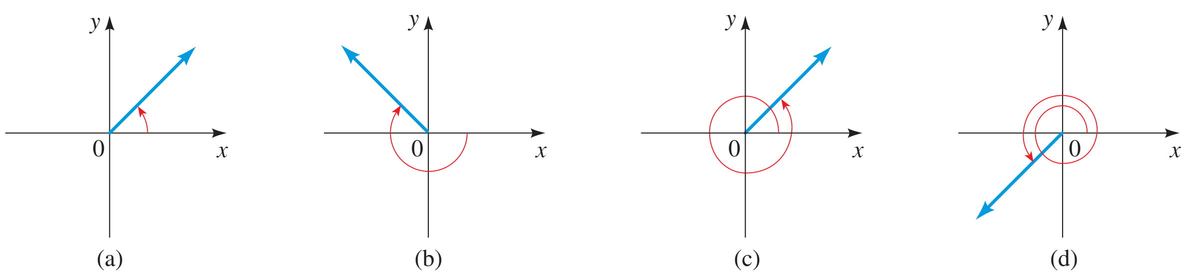


FIGURA 5 Ángulos en posición normal

Dos ángulos en posición normal son **coterminales** si sus lados coinciden. En la Figura 5, los ángulos en (a) y en (c) son coterminales.

EJEMPLO 2 | Ángulos coterminales

(a) Encuentre ángulos que sean coterminales con el ángulo $\theta = 30°$ en posición normal.

(b) Encuentre ángulos que sean coterminales con el ángulo $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ en posición normal.

SOLUCIÓN

(a) Para hallar ángulos positivos que sean coterminales con θ, sumamos cualquier múltiplo de 360°. Así,

$$30° + 360° = 390° \qquad \text{y} \qquad 30° + 720° = 750°$$

son coterminales con $\theta = 30°$. Para hallar ángulos negativos que son coterminales con θ, restamos cualquier múltiplo de 360°. Así

$$30° - 360° = -330° \qquad \text{y} \qquad 30° - 720° = -690°$$

son coterminales con θ. (Vea Figura 6.)

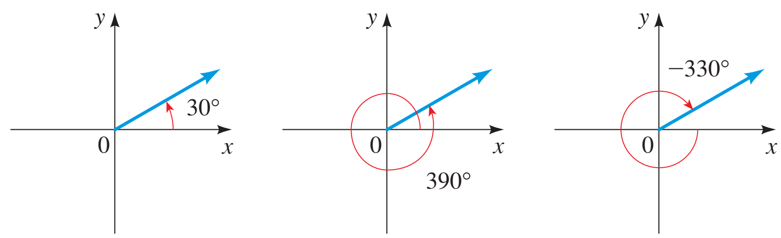


FIGURA 6

(b) Para hallar ángulos positivos que sean coterminales con θ, sumamos cualquier múltiplo de 2π. Así,

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3} \qquad \text{y} \qquad \frac{\pi}{3} + 4\pi = \frac{13\pi}{3}$$

son coterminales con $\theta = \pi/3$. Para hallar ángulos negativos que sean coterminales con θ, restamos cualquier múltiplo de 2π. Así

$$\frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{5\pi}{3} \qquad \text{y} \qquad \frac{\pi}{3} - 4\pi = -\frac{11\pi}{3}$$

son coterminales con θ. (Vea Figura 7.)

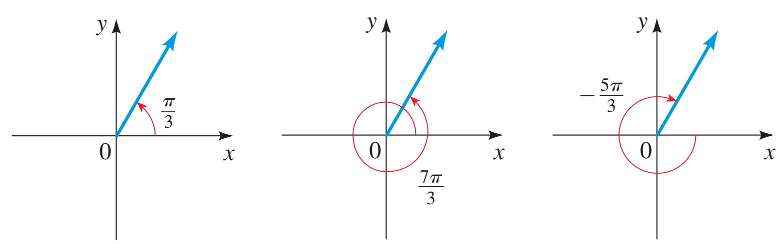


FIGURA 7

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **27** Y **29**

EJEMPLO 3 | Ángulos coterminales

Encuentre un ángulo con medida entre 0° y 360° que sea coterminal con el ángulo de medida 1290° en posición normal.

SOLUCIÓN De 1290° podemos restar 360° tantas veces como se desee, y el ángulo restante será coterminal con 1290°. Así, 1290° − 360 = 930° es coterminal con 1290° y por lo tanto el ángulo 1290° − 2(360°) = 570°.

Para hallar el ángulo que buscamos entre 0° y 360°, restamos 360° de 1290° tantas veces como sea necesario. Una forma eficiente de hacer esto es determinar cuántas veces cabe 360° en 1290°, es decir, divida 1290 entre 360, y el residuo será el ángulo que buscamos.

Vemos que 360 cabe tres veces en 1290, con un residuo de 210. Así, 210° es el ángulo deseado (vea Figura 8).

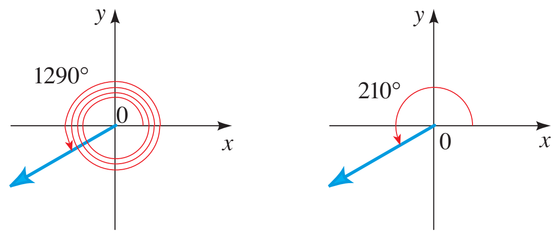


FIGURA 8

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **39**

Longitud de un arco de circunferencia

Un ángulo cuya medida en radianes es θ está subtendido por un arco que es la fracción $\theta/(2\pi)$ de la circunferencia de un círculo. Entonces, en una circunferencia de radio r, la longitud s de un arco que subtiende al ángulo θ (vea Figura 9) es

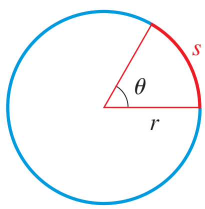


FIGURA 9 $s = \theta r$

$$s = \frac{\theta}{2\pi} \times \text{circunferencia de círculo}$$

$$= \frac{\theta}{2\pi}(2\pi r) = \theta r$$

LONGITUD DE UN ARCO CIRCULAR

En una circunferencia de radio r, la longitud s de un arco que subtiende un ángulo central de θ radianes es

$$s = r\theta$$

Despejando θ, obtenemos la importante fórmula

$$\boxed{\theta = \frac{s}{r}}$$

Esta fórmula nos permite definir medidas en radianes usando una circunferencia de cualquier radio r: La medida en radianes de un ángulo θ es s/r, donde s es la longitud del arco circular que subtiende a θ en una circunferencia de radio r (vea Figura 10).

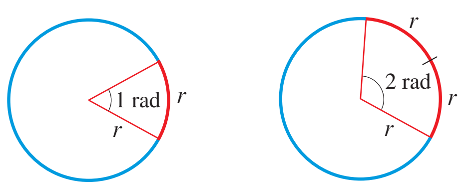


FIGURA 10 La medida de θ en radianes es el número de "radios" que pueden caber en un arco que subtienda a θ; de aquí el término *radián*.

EJEMPLO 4 | Longitud de arco y medida de ángulo

(a) Encuentre la longitud de un arco de circunferencia con radio 10 m que subtiende un ángulo central de 30°.

(b) Un ángulo central θ de un círculo de radio 4 m está subtendido por un arco de longitud 6 m. Encuentre la medida de θ en radianes.

6.1 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. **(a)** La medida en radianes de un ángulo θ es la longitud del ______ que subtiende el ángulo en un círculo de radio ________.

(b) Para convertir grados a radianes, multiplicamos por______.

(c) Para convertir radianes a grados, multiplicamos por______.

2. Un ángulo central θ se traza en una circunferencia de radio r.

(a) La longitud del arco subtendido por θ es $s =$ _____.

(b) El área del sector circular con ángulo central θ es $A =$ ____.

HABILIDADES

3-14 ■ Encuentre la medida en radianes del ángulo con la medida dada en grados.

3. 72° **4.** 54° **5.** $-45°$

6. $-60°$ **7.** $-75°$ **8.** $-300°$

9. 1080° **10.** 3960° **11.** 96°

12. 15° **13.** 7.5° **14.** 202.5°

15-26 ■ Encuentre la medida en grados del ángulo con la medida dada en radianes.

15. $\dfrac{7\pi}{6}$ **16.** $\dfrac{11\pi}{3}$ **17.** $-\dfrac{5\pi}{4}$

18. $-\dfrac{3\pi}{2}$ **19.** 3 **20.** -2

21. -1.2 **22.** 3.4 **23.** $\dfrac{\pi}{10}$

24. $\dfrac{5\pi}{18}$ **25.** $-\dfrac{2\pi}{15}$ **26.** $-\dfrac{13\pi}{12}$

27-32 ■ Nos dan la medida de un ángulo en posición estándar. Encuentre dos ángulos positivos y dos ángulos negativos que sean coterminales con el ángulo dado.

27. 50° **28.** 135° **29.** $\dfrac{3\pi}{4}$

30. $\dfrac{11\pi}{6}$ **31.** $-\dfrac{\pi}{4}$ **32.** $-45°$

33-38 ■ Nos dan las medidas de dos ángulos en posición normal. Determine si los ángulos son coterminales.

33. 70°, 430° **34.** $-30°$, 330°

35. $\dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{17\pi}{6}$ **36.** $\dfrac{32\pi}{3}, \dfrac{11\pi}{3}$

37. 155°, 875° **38.** 50°, 340°

39-44 ■ Encuentre un ángulo entre 0° y 360° que sea coterminal con el ángulo dado.

39. 733° **40.** 361° **41.** 1110°

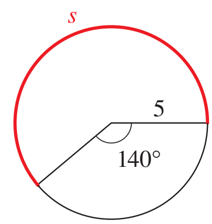
42. $-100°$ **43.** $-800°$ **44.** 1270°

45-50 ■ Encuentre un ángulo entre 0 y 2π que sea coterminal con el ángulo dado.

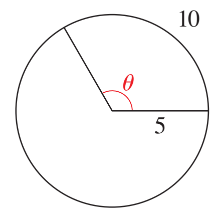
45. $\dfrac{17\pi}{6}$ **46.** $-\dfrac{7\pi}{3}$ **47.** 87π

48. 10 **49.** $\dfrac{17\pi}{4}$ **50.** $\dfrac{51\pi}{2}$

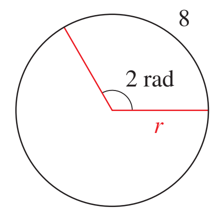
51. Encuentre la longitud del arc s de la figura.



52. Encuentre el ángulo θ de la figura.



53. Encuentre el radio r del círculo de la figura.



54. Encuentre la longitud del arco que subtiende un ángulo central de 45° en un círculo de radio 10 metros.

55. Encuentre la longitud de un arco que subtiende un ángulo central de 2 rad en un círculo de radio 2 millas.

56. Un ángulo central θ en un círculo con radio de 5 m está subtendido por un arco de 6 m de longitud. Encuentre la medida de θ en grados y en radianes.

57. Un arco de 100 m de longitud subtiende un ángulo central θ en un círculo de 50 m de radio. Encuentre la medida de θ en grados y en radianes.

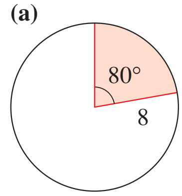
58. Un arco circular de 3 pies de longitud subtiende un ángulo central de 25°. Encuentre el radio del círculo.

59. Encuentre el radio del círculo si un arco de 6 m de longitud del círculo subtiende un ángulo central de $\pi/6$ radianes.

60. Encuentre el radio del círculo si un arco de 4 pies de longitud del círculo subtiende un ángulo central de 135°.

61. Encuentre el área del sector mostrado en cada figura.

(a)



(b)