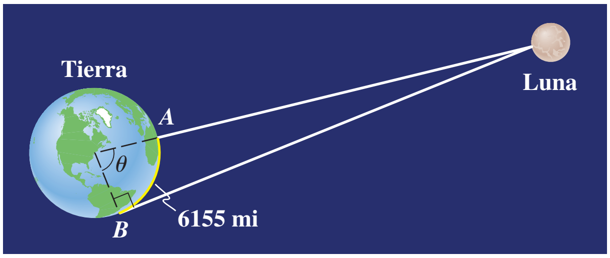
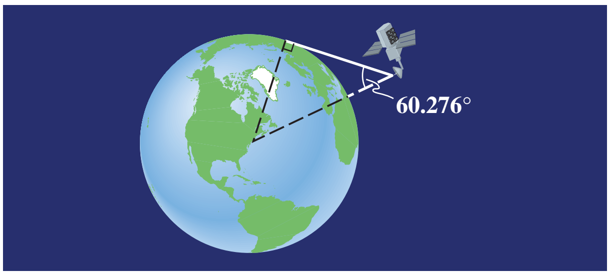
guiente figura). Los puntos A y B están a 6155 millas entre sí, y el radio de la Tierra es 3960 millas.

(a) Encuentre el ángulo θ en grados.

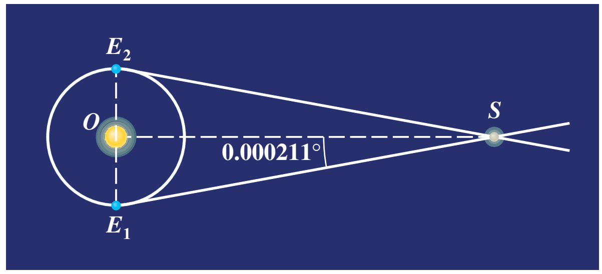
(b) Estime la distancia del punto A a la Luna.



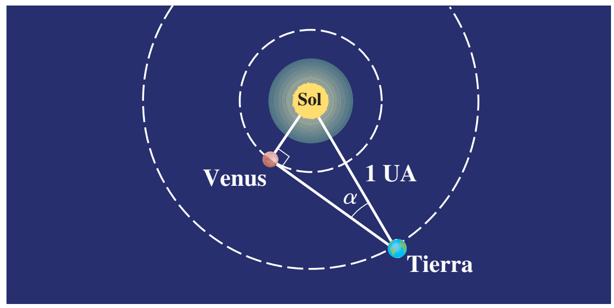
63. Radio de la Tierra En el Ejercicio 74 de la Sección 6.1 se dio un método para hallar el radio de la Tierra. A continuación veamos un método más moderno: de un satélite que está a 600 millas de la Tierra, se observa que un ángulo formado por la vertical y la línea de vista al horizonte es 60.276°. Use esta información para hallar el radio de la Tierra.



64. Paralaje Para hallar la distancia a estrellas cercanas se usa el método de paralaje. La idea es hallar un triángulo con la estrella en un vértice y con una base tan grande como sea posible. Para hacer esto, la estrella se observa en dos tiempos diferentes exactamente a 6 meses entre sí, y se registra su cambio aparente en posición. De estas dos observaciones, se puede calcular $\angle E_1SE_2$. (Los tiempos se escogen de modo que $\angle E_1SE_2$ sea tan grande como sea posible, lo cual garantiza que $\angle E_1OS$ es 90°.) El ángulo E_1SO se llama *paralaje* de la estrella. Alfa Centauri, la estrella más cercana a la Tierra, tiene un paralaje de 0.000211°. Estime la distancia a esta estrella. (Tome la distancia de la Tierra al Sol como 9.3×10^7 millas.)



65. Distancia de Venus al Sol La **elongación** α de un planeta es el ángulo formado por el planeta, la Tierra y el Sol (vea la figura). Cuando Venus alcanza su máxima elongación de 46.3°, la Tierra, Venus y el Sol forman un triángulo con ángulo recto en Venus. Encuentre la distancia entre Venus y el Sol en unidades astronómicas (UA). (Por definición, la distancia entre la Tierra y el Sol es 1 UA.)



DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

66. Triángulos semejantes Si dos triángulos son semejantes, ¿qué propiedades comparten? Explique la forma en que estas propiedades hacen posible definir las relaciones trigonométricas sin considerar el tamaño del triángulo.

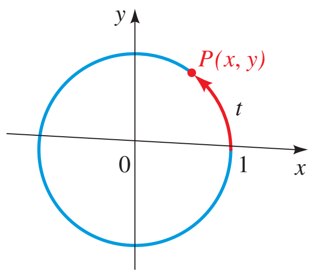
6.3 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS

Funciones trigonométricas de ángulos ▶ Evaluación de funciones trigonométricas de cualquier ángulo ▶ Identidades trigonométricas ▶ Áreas de triángulos

En la sección precedente definimos las relaciones trigonométricas para ángulos agudos. Aquí extendemos las relaciones trigonométricas a todos los ángulos al definir las funciones trigonométricas de ángulos. Con estas funciones podemos resolver problemas prácticos que involucren ángulos que no sean necesariamente agudos.

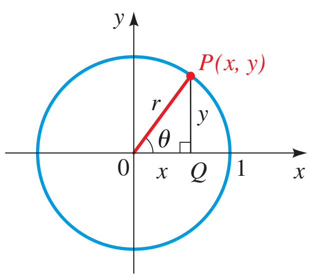
Relación con funciones trigonométricas de números reales

Quizá el lector ya haya estudiado funciones trigonométricas definidas usando la circunferencia unitaria (Capítulo 5). Para ver cómo se relacionan con las funciones trigonométricas de un *ángulo*, empecemos con la circunferencia unitaria del plano de coordenadas.



$P(x, y)$ es el punto terminal determinado por t.

Sea $P(x, y)$ el punto terminal determinado por un arco de longitud t sobre la circunferencia unitaria. Entonces t subtiende un ángulo θ en el centro de la circunferencia. Si trazamos una perpendicular de P al punto Q del eje x, entonces el triángulo OPQ es un triángulo rectángulo con catetos de longitud x y y, como se ve en la figura.



El triángulo OPQ es un triángulo recto

A continuación, por la definición de funciones trigonométricas del *número real t* tenemos

$$\operatorname{sen} t = y$$

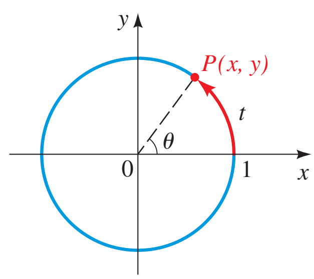
$$\cos t = x$$

Por la definición de las funciones trigonométricas del *ángulo* θ tendremos

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\text{op a } \theta}{\text{hip}} = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos \theta = \frac{\text{ady a } \theta}{\text{hip}} = \frac{x}{1} = x$$

Si θ se mide en radianes, entonces $\theta = t$. (Vea la figura siguiente.) Comparando las dos formas de definir las funciones trigonométricas, vemos que son idénticas. En otras palabras, como funciones, asignan valores idénticos a un número real determinado. (El número real es la medida de θ en radianes en un caso o la longitud t de un arco en el otro.)



La medida del ángulo θ en radianes es t.

¿Por qué, entonces, estudiamos trigonometría en dos formas diferentes? Porque diferentes aplicaciones requieren que veamos las funciones trigonométricas de modo diferente. (Vea *Enfoque sobre modelado*, páginas 427, 489 y 533, y Secciones 6.2, 6.5 y 6.6.)

Funciones trigonométricas de ángulos

Sea POQ un triángulo rectángulo con ángulo agudo θ como se ve en la Figura 1(a). Ponga θ en posición normal como se muestra en la Figura 1(b).

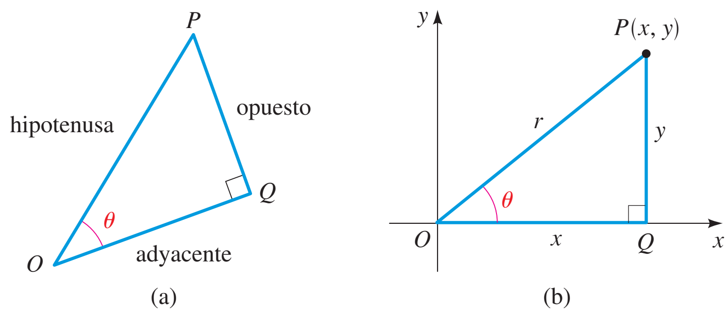


FIGURA 1

Entonces $P = P(x, y)$ es un punto en el lado terminal de θ. En el triángulo POQ, el lado opuesto tiene longitud y y el lado adyacente tiene longitud x. Usando el Teorema de Pitágoras, vemos que la hipotenusa tiene longitud $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Por lo tanto,

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{y}{r} \qquad \cos \theta = \frac{x}{r} \qquad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

Las otras relaciones trigonométricas se pueden hallar en la misma forma.

Estas observaciones nos permiten extender las relaciones trigonométricas a cualquier ángulo. Definimos las funciones trigonométricas de ángulos como sigue (vea Figura 2).

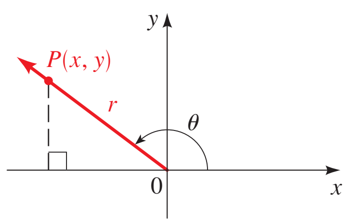


FIGURA 2

DEFINICIÓN DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Sea θ un ángulo en posición normal y sea $P(x, y)$ un punto en el lado terminal. Si $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la distancia del origen al punto $P(x, y)$, entonces

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{y}{r} \qquad \cos \theta = \frac{x}{r} \qquad \tan \theta = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y} \quad (y \neq 0) \qquad \sec \theta = \frac{r}{x} \quad (x \neq 0) \qquad \cot \theta = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$

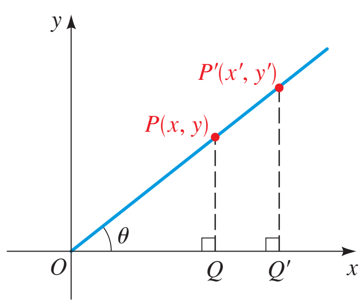


FIGURA 3

Como la división entre 0 no es una operación definida, ciertas funciones trigonométricas no están definidas para ciertos ángulos. Por ejemplo, $\tan 90° = y/x$ no está definida porque $x = 0$. Los ángulos para los cuales las funciones trigonométricas pueden no estar definidas son los ángulos para los cuales la coordenada x o la y de un punto en el lado terminal del ángulo es 0. Éstos son **ángulos cuadrantales**, es decir, ángulos que son coterminales con los ejes de coordenadas.

Es un dato de la mayor importancia que las funciones trigonométricas *no* dependen de la selección del punto $P(x, y)$. Esto es porque si $P'(x', y')$ es cualquier otro punto en el lado terminal, como en la figura 3, entonces los triángulos POQ y $P'OQ'$ son semejantes.

Evaluación de funciones trigonométricas de cualquier ángulo

De la definición vemos que los valores de las funciones trigonométricas son todos positivos si el ángulo θ tiene su lado terminal en el primer cuadrante. Esto es porque x y y son positivas en este cuadrante. [Por supuesto, r es siempre positiva porque es simplemente la distancia del origen al punto $P(x, y)$.] Si el lado terminal de θ está en el segundo cuadrante, sin embargo, entonces x es negativa y y positiva. Por lo tanto, en el segundo cuadrante las funciones sen θ y csc θ son positivas, y todas las otras funciones trigonométricas tienen valores negativos. Se pueden comprobar las otras entradas de la tabla siguiente.

SIGNOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Cuadrante	Funciones positivas	Funciones negativas
I	todas	ninguna
II	sen, csc	cos, sec, tan, cot
III	tan, cot	sen, csc, cos, sec
IV	cos, sec	sen, csc, tan, cot

A continuación llevamos nuestra atención a hallar los valores de las funciones trigonométricas para ángulos que no sean agudos.

EJEMPLO 1 | Hallar funciones trigonométricas de ángulos

Encuentre **(a)** cos 135° y **(b)** tan 390°.

SOLUCIÓN

(a) De la Figura 4 vemos que $\cos 135° = -x/r$. Pero $\cos 45° = x/r$, y como $\cos 45° = \sqrt{2}/2$ tenemos

$$\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(b) Los ángulos 390° y 30° son coterminales. De la Figura 5 es evidente que $\tan 390° = \tan 30°$ y, como $\tan 30° = \sqrt{3}/3$, tenemos

$$\tan 390° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

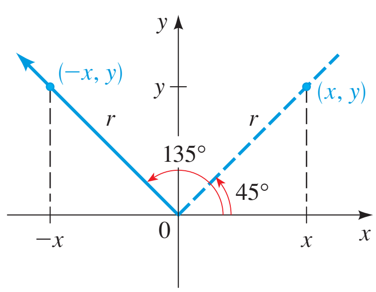


FIGURA 4

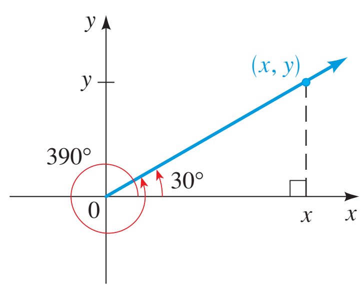


FIGURA 5

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **11** Y **13**

Del Ejemplo 1 vemos que las funciones trigonométricas para ángulos que no son agudos tienen el mismo valor, excepto posiblemente por el signo, como las correspondientes funciones trigonométricas de un ángulo agudo. Ese ángulo agudo recibirá el nombre de *ángulo de referencia.*

ÁNGULO DE REFERENCIA

Sea θ un ángulo en posición normal. El **ángulo de referencia** $\bar{\theta}$ asociado con θ es el ángulo agudo formado por el lado terminal de θ y el eje x.

La Figura 6 muestra que para hallar un ángulo de referencia $\bar{\theta}$, es útil conocer el cuadrante en el que se encuentre el lado terminal del ángulo θ.

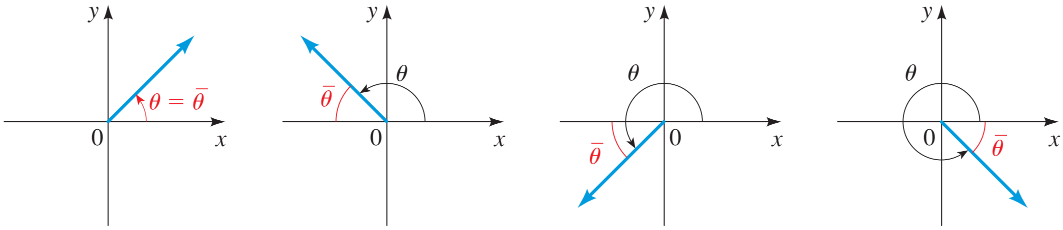


FIGURA 6 Ángulo de referencia $\bar{\theta}$ para un ángulo θ.

EJEMPLO 2 | Hallar ángulos de referencia

Encuentre el ángulo de referencia para **(a)** $\theta = \dfrac{5\pi}{3}$ y **(b)** $\theta = 870°$.

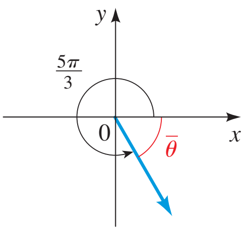


FIGURA 7

SOLUCIÓN

(a) El ángulo de referencia es el ángulo agudo formado por el lado terminal del ángulo $5\pi/3$ y el eje x (vea Figura 7). Como el lado terminal de este ángulo está en el cuarto cuadrante, el ángulo de referencia es

$$\bar{\theta} = 2\pi - \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

(b) Los ángulos 870° y 150° son coterminales [porque $870 - 2(360) = 150$]. Entonces, el lado terminal de este ángulo está en el segundo cuadrante (vea Figura 8). Por lo tanto, el ángulo de referencia es

$$\bar{\theta} = 180° - 150° = 30°$$

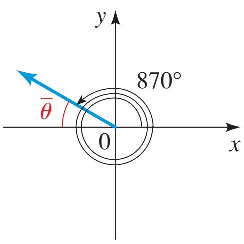


FIGURA 8

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **3** Y **7**

EVALUACIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS PARA CUALQUIER ÁNGULO

Para hallar los valores de las funciones trigonométricas para cualquier ángulo θ, damos los siguientes pasos.

1. Hallar el ángulo de referencia $\bar{\theta}$ asociado con el ángulo θ.
2. Determinar el signo de la función trigonométrica de θ observando el cuadrante en el que se encuentre θ.
3. El valor de la función trigonométrica de θ es el mismo, excepto posiblemente por el signo, que el valor de la función trigonométrica de $\bar{\theta}$.

EJEMPLO 3 | Uso del ángulo de referencia para evaluar funciones trigonométricas

Encuentre **(a)** sen 240° y **(b)** cot 495°.

SOLUCIÓN

(a) Este ángulo tiene su lado terminal en el tercer cuadrante, como se muestra en la Figura 9. El ángulo de referencia es, por lo tanto, $240° - 180° = 60°$ y el valor de sen 240° es negativo. Entonces

$$\text{sen } 240° = -\text{sen } 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Signo   Ángulo de referencia

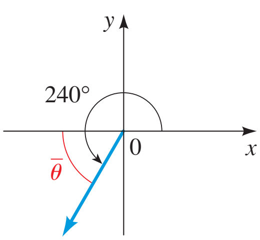


FIGURA 9
sen 240° es *negativo*.

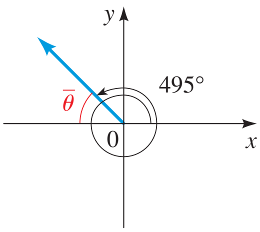


FIGURA 10
tan 495° *es negativa. por lo tanto,* cot 495º *es negativa.*

(b) El ángulo de 495° es coterminal con el ángulo de 135°, y el lado terminal de este ángulo está en el segundo cuadrante, como se muestra en la Figura 10. Por lo tanto, el ángulo de referencia es 180° − 135° = 45 y el valor de cot 495° es negativo. Tenemos

$$\cot 495° = \cot 135° = -\cot 45° = -1$$

Ángulos coterminales Signo Ángulo de referencia

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **17** Y **19**

EJEMPLO 4 | Uso del ángulo de referencia para evaluar funciones trigonométricas

Encuentre **(a)** $\operatorname{sen}\dfrac{16\pi}{3}$ y **(b)** $\sec\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

SOLUCIÓN

(a) El ángulo $16\pi/3$ es coterminal con $4\pi/3$, y estos ángulos están en el tercer cuadrante (vea Figura 11). Entonces, el ángulo de referencia es $(4\pi/3) - \pi = \pi/3$. Como el valor del seno es negativo en el tercer cuadrante, tenemos

$$\operatorname{sen}\frac{16\pi}{3} = \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ángulos coterminales Signo Ángulo de referencia

(b) El ángulo $-\pi/4$ está en el cuarto cuadrante, y su ángulo de referencia es $\pi/4$ (vea figura 12). Como la secante es positiva en este cuadrante, obtenemos

$$\sec\left(-\frac{\pi}{4}\right) = +\sec\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$$

Signo Ángulo de referencia

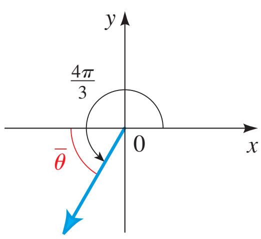


FIGURA 11
$\operatorname{sen}\frac{16\pi}{3}$ *es negativo.*

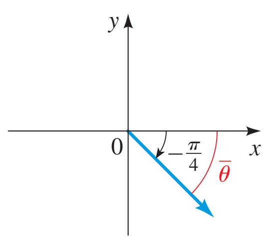


FIGURA 12
$\cos(-\frac{\pi}{4})$ *es positivo por lo tanto,* $\sec(-\frac{\pi}{4})$ *es positivo*

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **23** Y **25**

▼ Identidades trigonométricas

Las funciones trigonométricas de ángulos están relacionadas entre sí por medio de varias e importantes ecuaciones llamadas **identidades trigonométricas**. Ya hemos encontrado las identidades recíprocas. Estas identidades continúan cumpliéndose para cualquier ángulo θ, siempre que ambos lados de la ecuación estén definidos. Las identidades de Pitágoras son una consecuencia del Teorema de Pitágoras.*

IDENTIDADES FUNDAMENTALES

Identidades recíprocas

$$\csc\theta = \frac{1}{\text{sen}\,\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}$$

Identidades de Pitágoras

$$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta \qquad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

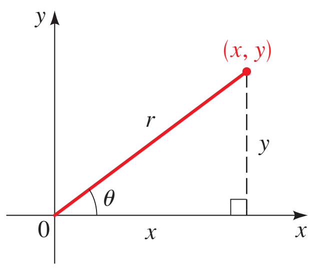


FIGURA 13

DEMOSTRACIÓN Demostremos la primera identidad de Pitágoras. Usando $x^2 + y^2 = r^2$ (el Teorema de Pitágoras) en la Figura 13, tenemos

$$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = \frac{x^2+y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

Por lo tanto, $\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\,\theta = 1$. (Aun cuando la figura indica un ángulo agudo, se debe verificar que la prueba se cumpla para todo ángulo θ.) ■

Vea los Ejercicios 61 y 62 para las pruebas de las otras dos identidades de Pitágoras.

EJEMPLO 5 | Expresar una función trigonométrica en términos de otra

(a) Expresar sen θ en términos de cos θ.

(b) Expresar tan θ en términos de sen θ, donde θ está en el segundo cuadrante.

SOLUCIÓN

(a) De la primera identidad de Pitágoras obtenemos

$$\text{sen}\,\theta = \pm\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

donde el signo depende del cuadrante. Si θ está en el primero o segundo cuadrante, entonces sen θ es positivo, y por tanto

$$\text{sen}\,\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$$

mientras que si θ está en el tercero o cuarto cuadrante, sen θ es negativo, y por tanto

$$\text{sen}\,\theta = -\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

(b) Como $\tan\theta = \text{sen}\,\theta/\cos\theta$, necesitamos escribir cos θ en términos de sen θ. Por la parte (a),

$$\cos\theta = \pm\sqrt{1-\text{sen}^2\theta}$$

y como cos θ es negativo en el segundo cuadrante, el signo negativo aplica aquí. Por lo tanto,

$$\tan\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \frac{\text{sen}\,\theta}{-\sqrt{1-\text{sen}^2\theta}}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **39** ■

* Continuamos con la convención acostumbrada de escribir $\text{sen}^2\theta$ por $(\text{sen}\,\theta)^2$. En general, escribimos $\text{sen}^n\,\theta$ por $(\text{sen}\,\theta)^n$ para todos los enteros n excepto $n = -1$. Al exponente $n = -1$ se asignará otro significado en la Sección 6.4. Por supuesto, la misma convención aplica a las otras cinco funciones trigonométricas.

EJEMPLO 6 | Evaluación de una función trigonométrica

Si $\tan\theta = \frac{2}{3}$ y θ está en el tercer cuadrante, hallar $\cos\theta$.

SOLUCIÓN 1 Necesitamos escribir $\cos\theta$ en términos de $\tan\theta$. De la identidad $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$ obtenemos $\sec\theta = \pm\sqrt{\tan^2\theta + 1}$. En el tercer cuadrante, $\sec\theta$ es negativa, por lo cual

$$\sec\theta = -\sqrt{\tan^2\theta + 1}$$

Si se desea racionalizar el denominador, se puede expresar $\cos\theta$ como

$$-\frac{3}{\sqrt{13}}\cdot\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = -\frac{3\sqrt{3}}{13}$$

Entonces,

$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} = \frac{1}{-\sqrt{\tan^2\theta + 1}}$$

$$= \frac{1}{-\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1}} = \frac{1}{-\sqrt{\frac{13}{9}}} = -\frac{3}{\sqrt{13}}$$

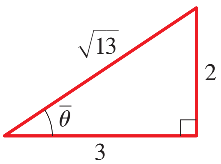


FIGURA 14

SOLUCIÓN 2 Este problema se puede resolver más fácilmente usando el método del Ejemplo 2 de la Sección 6.2. Recuerde que, excepto por el signo, los valores de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo son iguales a las de un ángulo agudo (el ángulo de referencia). Por lo tanto, ignorando el signo por ahora, tracemos un triángulo rectángulo con un ángulo agudo $\overline{\theta}$ que satisfaga $\overline{\theta} = \frac{2}{3}$ (vea Figura 14). Por el Teorema de Pitágoras, la hipotenusa de este triángulo tiene longitud $\sqrt{13}$. Del triángulo de la Figura 14 vemos de inmediato que $\cos\overline{\theta} = 3/\sqrt{13}$. Como θ está en el tercer cuadrante, $\cos\theta$ es negativo y por tanto

$$\cos\theta = -\frac{3}{\sqrt{13}}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **45**

EJEMPLO 7 | Evaluación de funciones trigonométricas

Si $\sec\theta = 2$ y θ está en el cuarto cuadrante, encuentre las otras cinco funciones trigonométricas de θ.

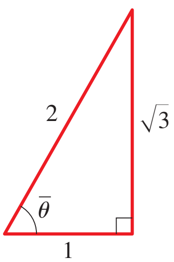


FIGURA 15

SOLUCIÓN Trazamos un triángulo como en la Figura 15 para que $\sec\overline{\theta} = 2$. Tomando en cuenta el hecho de que θ está en el cuarto cuadrante, obtenemos

$$\text{sen}\,\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\theta = \frac{1}{2} \qquad \tan\theta = -\sqrt{3}$$

$$\csc\theta = -\frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \sec\theta = 2 \qquad \cot\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **47**

Áreas de triángulos

Concluimos esta sección con una aplicación de las funciones trigonométricas que comprende ángulos que no son necesariamente agudos. Aplicaciones más extensas aparecen en las siguientes dos secciones.

El área de un triángulo es $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{altura}$. Si conocemos dos lados y el ángulo entre ellos de un triángulo, entonces podemos hallar la altura usando las funciones trigonométricas, y a partir de esto podemos hallar el área.

Si θ no es ángulo agudo, entonces la altura del triángulo de la Figura 16(a) está dada por $h = b\,\text{sen}\,\theta$. Entonces el área es

$$\mathcal{A} = \tfrac{1}{2} \times \text{base} \times \text{altura} = \tfrac{1}{2}ab\,\text{sen}\,\theta$$

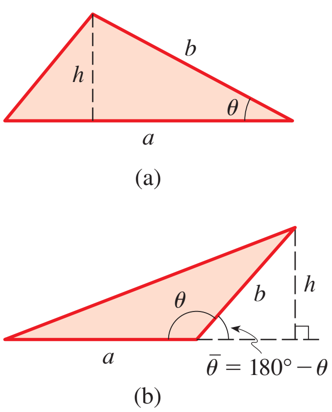


FIGURA 16

Si el ángulo θ no es agudo, entonces de la Figura 16(b) vemos que la altura del triángulo es

$$h = b\,\text{sen}(180° - \theta) = b\,\text{sen}\,\theta$$

Esto es así porque el ángulo de referencia de θ es el ángulo $180° - \theta$. Así, también en este caso, el área del triángulo es

$$\mathcal{A} = \tfrac{1}{2} \times \text{base} \times \text{altura} = \tfrac{1}{2}ab \text{ sen } \theta$$

ÁREA DE UN TRIÁNGULO

El área $\mathcal{A}$ de un triángulo con lados de longitudes a y b y con ángulo θ incluido es

$$\mathcal{A} = \tfrac{1}{2}ab \text{ sen } \theta$$

EJEMPLO 8 | Hallar el área de un triángulo

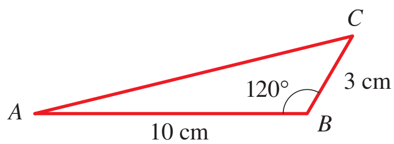


FIGURA 17

Encuentre el área del triángulo ABC que se ve en la Figura 17.

SOLUCIÓN El triángulo tiene lados de longitud 10 cm y 3 cm, con ángulo incluido de 120°. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \tfrac{1}{2}ab \text{ sen } \theta \\ &= \tfrac{1}{2}(10)(3) \text{ sen } 120° \\ &= 15 \text{ sen } 60° && \text{Ángulo de referencia} \\ &= 15\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 13 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **55** ■

6.3 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Si el ángulo θ está en posición normal, $P(x, y)$ es un punto sobre el lado terminal de θ y r es la distancia del origen a P, entonces

$\text{sen } \theta = \dfrac{\square}{\square}$ $\quad\cos \theta = \dfrac{\square}{\square}$ $\quad\tan \theta = \dfrac{\square}{\square}$

2. El signo de una función trigonométrica de θ depende del

________ en el que se encuentre el lado terminal del ángulo θ.

En el segundo cuadrante, sen θ es ________ (positivo/negativo).

En el tercer cuadrante, cos θ es ________ (positivo/negativo).

En el cuarto cuadrante, sen θ es ________ (positivo/negativo).

HABILIDADES

3-10 ■ Encuentre el ángulo de referencia para el ángulo dado.

3. **(a)** 150° **(b)** 330° **(c)** $-30°$

4. **(a)** 120° **(b)** $-210°$ **(c)** 780°

5. **(a)** 225° **(b)** 810° **(c)** $-105°$

6. **(a)** 99° **(b)** $-199°$ **(c)** 359°

7. **(a)** $\dfrac{11\pi}{4}$ **(b)** $-\dfrac{11\pi}{6}$ **(c)** $\dfrac{11\pi}{3}$

8. **(a)** $\dfrac{4\pi}{3}$ **(b)** $\dfrac{33\pi}{4}$ **(c)** $-\dfrac{23\pi}{6}$

9. **(a)** $\dfrac{5\pi}{7}$ **(b)** -1.4π **(c)** 1.4

10. **(a)** 2.3π **(b)** 2.3 **(c)** -10π

11-34 ■ Encuentre el valor exacto de la función trigonométrica.

11. sen 150° **12.** sen 225° **13.** cos 210°

14. $\cos(-60°)$ **15.** $\tan(-60°)$ **16.** sec 300°

17. $\csc(-630°)$ **18.** cot 210° **19.** cos 570°

20. sec 120° **21.** tan 750° **22.** cos 660°

23. sen $\dfrac{2\pi}{3}$ **24.** sen $\dfrac{5\pi}{3}$ **25.** sen $\dfrac{3\pi}{2}$

26. $\cos \dfrac{7\pi}{3}$ **27.** $\cos\left(-\dfrac{7\pi}{3}\right)$ **28.** $\tan \dfrac{5\pi}{6}$

29. $\sec \dfrac{17\pi}{3}$ **30.** $\csc \dfrac{5\pi}{4}$ **31.** $\cot\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

32. $\cos \dfrac{7\pi}{4}$ **33.** $\tan \dfrac{5\pi}{2}$ **34.** sen $\dfrac{11\pi}{6}$

35-38 ■ Por la información dada, encuentre el cuadrante en el que se encuentra θ.

35. $\text{sen}\,\theta < 0$ y $\cos\theta < 0$

36. $\tan\theta < 0$ y $\text{sen}\,\theta < 0$

37. $\sec\theta > 0$ y $\tan\theta < 0$

38. $\csc\theta > 0$ y $\cos\theta < 0$

39-44 ■ Escriba la primera función trigonométrica en términos de la segunda para θ en el cuadrante dado.

39. $\tan\theta$, $\cos\theta$; θ en el cuadrante III

40. $\cot\theta$, $\text{sen}\,\theta$; θ en el cuadrante II

41. $\cos\theta$, $\text{sen}\,\theta$; θ en el cuadrante IV

42. $\sec\theta$, $\text{sen}\,\theta$; θ en el cuadrante I

43. $\sec\theta$, $\tan\theta$; θ en el cuadrante II

44. $\csc\theta$, $\cot\theta$; θ en el cuadrante III

45-52 ■ Encuentre los valores de las funciones trigonométricas de θ a partir de la información dada.

45. $\text{sen}\,\theta = \frac{3}{5}$, θ en el cuadrante II

46. $\cos\theta = -\frac{7}{12}$, θ en el cuadrante III

47. $\tan\theta = -\frac{3}{4}$, $\cos\theta > 0$

48. $\sec\theta = 5$, $\text{sen}\,\theta < 0$

49. $\csc\theta = 2$, θ en el cuadrante I

50. $\cot\theta = \frac{1}{4}$, $\text{sen}\,\theta < 0$

51. $\cos\theta = -\frac{2}{7}$, $\tan\theta < 0$

52. $\tan\theta = -4$, $\text{sen}\,\theta > 0$

53. Si $\theta = \pi/3$, encuentre el valor de cada expresión.
 (a) $\text{sen}\,2\theta$, $2\,\text{sen}\,\theta$ **(b)** $\text{sen}\,\frac{1}{2}\theta$, $\frac{1}{2}\,\text{sen}\,\theta$
 (c) $\text{sen}^2\theta$, $\text{sen}(\theta^2)$

54. Encuentre el área de un triángulo con lados de longitud 7 y 9 y ángulo entre ellos de 72°.

55. Encuentre el área de un triángulo con lados de longitud 10 y 12 y ángulo entre ellos de 10°.

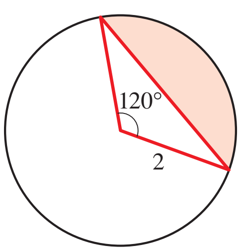
56. Encuentre el área de un triángulo equilátero con lados de longitud 10.

57. Un triángulo tiene un área de 16 pulg.^{2}, y dos de los lados del triángulo tienen longitudes de 5 pulg. y 7 pulg. Encuentre el ángulo entre ellos por estos dos lados.

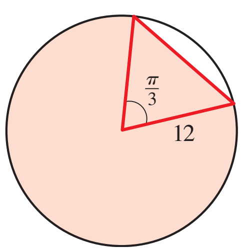
58. Un triángulo isósceles tiene un área de 24 cm^2, y el ángulo entre los dos lados iguales es $5\pi/6$. ¿Cuál es la longitud de los dos lados iguales?

59-60 ■ Encuentre el área de la región sombreada de la figura.

59.



60.



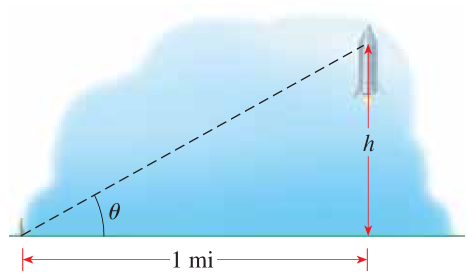
61. Use la primera identidad de Pitágoras para demostrar la segunda. [*Sugerencia:* Divida entre $\cos^2\theta$.]

62. Use la primera identidad de Pitágoras para demostrar la tercera.

APLICACIONES

63. Altura de un cohete Un cohete disparado en línea recta hacia arriba es rastreado por un observador que está en el suelo a una milla de distancia.
 (a) Demuestre que cuando el ángulo de elevación es θ, la altura del cohete en pies es $h = 5280\tan\theta$.
 (b) Complete la tabla para hallar la altura del cohete a los ángulos de elevación dados.

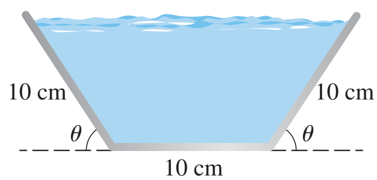
θ	20°	60°	80°	85°
h				



64. Canal para lluvias Un canal de aguas llovedizas se construye de lámina metálica de 30 cm de ancho, doblando un tercio de la lámina a ambos lados en un ángulo θ.
 (a) Demuestre que el área transversal del canal está modelada por la función

$$A(\theta) = 100\,\text{sen}\,\theta + 100\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$$

 (b) Grafique la función A para $0 \le \theta \le \pi/2$.
 (c) ¿Para qué ángulo θ se obtiene la máxima área de sección transversal?



65. Viga de madera Una viga rectangular ha de cortarse de un tronco cilíndrico de 20 cm de diámetro. Las figuras siguientes muestran diferentes formas en que se puede hacer esto.
 (a) Exprese el área de sección transversal de la viga como función del ángulo θ de las figuras.
 (b) Grafique la función que encontró en el inciso (a).
 (c) Encuentre las dimensiones de la viga con máxima área de sección transversal.