DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

72. Uso de una calculadora Para resolver cierto problema usted necesita hallar el seno de 4 rad. Un compañero de grupo usa la calculadora de él y le dice que

$$\text{sen } 4 = 0.0697565737$$

En su calculadora, usted obtiene

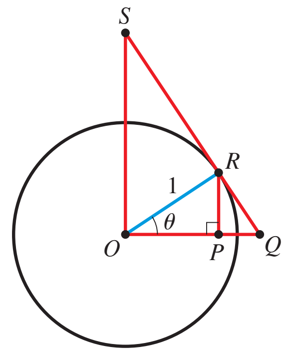
$$\text{sen } 4 = -0.7568024953$$

¿Qué es lo que está mal? ¿Qué error tuvo su compañero?

73. Diagrama trigonométrico de Viète En el siglo XVI el matemático francés François Viète (vea página 49) publicó el sorprendente diagrama que sigue. Cada una de las seis funciones trigonométricas de θ es igual a la longitud de un segmento de recta de la figura. Por ejemplo, sen $\theta = |PR|$, porque a partir de ΔOPR vemos que

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{op } \theta}{\text{hip}} = \frac{|PR|}{|OR|} = \frac{|PR|}{1} = |PR|$$

Para cada una de las otras cinco funciones trigonométricas, encuentre un segmento de recta en la figura cuya longitud sea igual al valor de la función en θ. (*Nota:* El radio de la circunferencia es 1, el centro es O, el segmento QS es tangente a la circunferencia en R y $\angle SOQ$ es un ángulo recto.)



PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO **Semejanza**

En este proyecto exploramos la idea de semejanza y algunas de sus consecuencias para cualquier tipo de figura. Se puede hallar el proyecto en el sitio web acompañante de este libro: **www.stewartmath.com**

6.4 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS Y TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

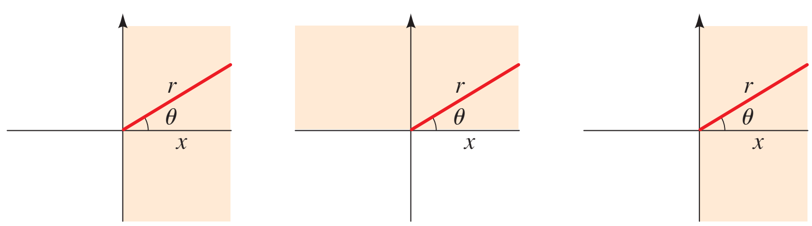
Funciones seno inverso, coseno inverso y tangente inversa ▶ Solución para ángulos en triángulos rectángulos ▶ Evaluación de expresiones que contienen funciones trigonométricas inversas

Las gráficas de las funciones trigonométricas inversas se estudian en la Sección 5.5.

Recuerde que para que una función tenga una inversa, debe ser biunívoca. Como las funciones trigonométricas no son biunívocas, no tienen inversas. Por lo tanto, restringimos el dominio de cada una de las funciones trigonométricas a intervalos en los que alcanzan todos sus valores y en los que son biunívocas. Las funciones resultantes tienen el mismo rango que las funciones originales pero son biunívocas.

▼ Funciones seno inverso, coseno inverso y tangente inversa

Consideremos primero la función seno. Restringimos el dominio de la función seno a ángulos θ con $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. De la Figura 1 vemos que en este dominio la función seno alcanza cada uno de los valores sobre el intervalo $[-1, 1]$ exactamente una vez y, por tanto, es biunívoca. Análogamente, restringimos los dominios de coseno y tangente como se ve en la Figura 1.



$\text{sen } \theta = \frac{y}{r}$ $\quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

$\cos \theta = \frac{x}{r}$ $\quad 0 \le \theta \le \pi$

$\tan \theta = \frac{x}{y}$ $\quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

FIGURA 1 Dominios restringidos de las funciones seno, coseno y tangente.

En estos dominios restringidos podemos definir una inversa para cada una de estas funciones. Por la definición de función inversa tenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^{-1} x = y \quad &\Leftrightarrow \quad \operatorname{sen} y = x \\ \cos^{-1} x = y \quad &\Leftrightarrow \quad \cos y = x \\ \tan^{-1} x = y \quad &\Leftrightarrow \quad \tan y = x \end{aligned}$$

Resumimos los dominios y rangos de las funciones trigonométricas inversas en el siguiente cuadro.

LAS FUNCIONES SENO INVERSO, COSENO INVERSO Y TANGENTE INVERSA

Las funciones seno, coseno y tangente en los dominios restringidos $[-\pi/2, \pi/2]$, $[0, \pi]$, y $(-\pi/2, \pi/2)$, respectivamente, son biunívocas y por tanto tienen inversas. Las funciones inversas tienen dominio y rango como sigue.

Función	Dominio	Rango
$\operatorname{sen}^{-1} x$	$[-1, 1]$	$[-\pi/2, \pi/2]$
$\cos^{-1} x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$\tan^{-1} x$	$\mathbb{R}$	$(-\pi/2, \pi/2)$

Las funciones sen^{-1}, $x \cos^{-1} x$ y $\tan^{-1} x$ a veces reciben el nombre de **arcseno, arccoseno** y **arctangente**, respectivamente.

Como éstas son funciones inversas, invierten la regla de la función original. Por ejemplo, como $\operatorname{sen} \pi/6 = \frac{1}{2}$, se concluye que $\operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{2} = \pi/6$. El siguiente ejemplo da más ilustraciones.

EJEMPLO 1 | Evaluación de funciones trigonométricas inversas

Encuentre el valor exacto.

(a) $\operatorname{sen}^{-1} \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **(b)** $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ **(c)** $\tan^{-1} 1$

SOLUCIÓN

(a) El ángulo en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ cuyo seno es $\sqrt{3}/2$ es $\pi/3$. Por lo tanto, $\operatorname{sen}^{-1}(\sqrt{3}/2) = \pi/3$.

(b) El ángulo en el intervalo $[0, \pi]$ cuyo coseno es $-\frac{1}{2}$ es $2\pi/3$. Por lo tanto, $\cos^{-1}(-\frac{1}{2}) = 2\pi/3$.

(c) El ángulo en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ cuya tangente es 1 es $\pi/4$. Por lo tanto, $\tan^{-1} 1 = \pi/4$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **3** ■

EJEMPLO 2 | Evaluación de funciones trigonométricas inversas

Encuentre valores para la expresión dada.

(a) $\operatorname{sen}^{-1}(0.71)$ **(b)** $\tan^{-1}(2)$ **(c)** $\cos^{-1}(2)$

SOLUCIÓN Usamos calculadora para aproximar estos valores.

(a) Usando las teclas INV SIN o SIN⁻¹ o ARC SIN de la calculadora (puesta en el modo de radianes), obtenemos

$$\operatorname{sen}^{-1}(0.71) \approx 0.78950$$

(b) Usando las teclas INV TAN o TAN⁻¹ o ARC TAN de la calculadora (puesta en el modo de radianes), obtenemos

$$\tan^{-1} 2 \approx 1.10715$$

(c) Como $2 > 1$, no está en el dominio de $\cos^{-1} x$, de modo que $\cos^{-1} x$ no está definido.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **7, 11** Y **13**

Solución para ángulos en triángulos rectángulos

En la Sección 6.2 resolvimos triángulos usando las funciones trigonométricas para hallar los lados desconocidos. Ahora usamos funciones trigonométricas inversas para despejar *ángulos* en un triángulo rectángulo.

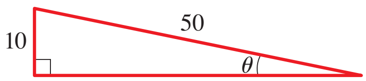


FIGURA 2

EJEMPLO 3 | Hallar un ángulo en un triángulo rectángulo

Encuentre el ángulo θ en el triángulo que se ve en la Figura 2.

SOLUCIÓN Como θ es el ángulo opuesto al lado de longitud 10 y la hipotenusa tiene longitud 50, tenemos

$$\text{sen}\,\theta = \frac{10}{50} = \frac{1}{5} \qquad \text{sen}\,\theta = \frac{\text{op}\,\theta}{\text{hip}}$$

Ahora podemos usar $\text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)$ para hallar θ:

$$\theta = \text{sen}^{-1}\tfrac{1}{5} \qquad \text{Definición de } \text{sen}^{-1} x$$

$$\theta \approx 11.5° \qquad \text{Calculadora (en modo de grados)}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **15**

EJEMPLO 4 | Solución de un ángulo en un triángulo rectángulo

Una escalera de 40 pies se apoya contra un edificio. Si la base de la escalera está a 6 pies de la base del edificio, ¿cuál es el ángulo formado por la escalera y el edificio?

SOLUCIÓN Primero trazamos un diagrama como en la Figura 3. Si θ es el ángulo entre la escalera y el edificio, entonces

$$\text{sen}\,\theta = \frac{6}{40} = 0.15 \qquad \text{sen}\,\theta = \frac{\text{op a}\,\theta}{\text{hip}}$$

A continuación usamos $\text{sen}^{-1}(0.15)$ para hallar θ:

$$\theta = \text{sen}^{-1}(0.15) \qquad \text{Definición de } \text{sen}^{-1}$$

$$\theta \approx 8.6° \qquad \text{Calculadora (en modo de grados)}$$

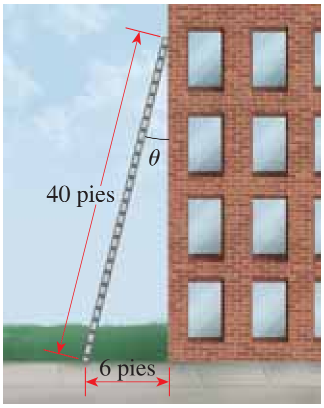


FIGURA 3

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **37**

Para escoger los signos apropiados, nótese que u se encuentra en el intervalo $[0, \pi]$ porque $u = \cos^{-1} x$. Como sen u es positivo en este intervalo, el signo $+$ es la opción correcta. Si sustituimos $u = \cos^{-1} x$ en las ecuaciones mostradas y usamos la propiedad de cancelación $\cos(\cos^{-1} x) = x$, obtenemos

$$\operatorname{sen}(\cos^{-1} x) = \sqrt{1 - x^2} \qquad \text{y} \qquad \tan(\cos^{-1} x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **33** Y **35**

Nota: En la Solución 1 del Ejemplo 8 podría parecer que debido a que estamos trazando un triángulo, el ángulo $\theta = \cos^{-1} x$ debe ser agudo. Pero resulta que el método del triángulo funciona para cualquier x. Los dominios y rangos para las seis funciones trigonométricas inversas se han escogido en forma tal que podemos siempre usar un triángulo para hallar $S(T^{-1}(x))$, donde S y T son cualesquiera funciones trigonométricas.

6.4 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Las funciones seno inverso, coseno inverso y tangente inversa tienen los siguientes dominios y rangos.

(a) La función $\operatorname{sen}^{-1} x$ tiene dominio____ y rango _____.

(b) La función $\cos^{-1} x$ tiene dominio ___ y rango _____.

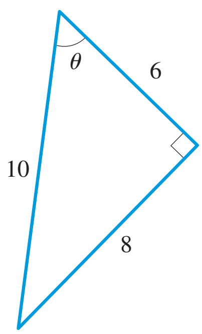
(c) La función $\tan^{-1} x$ tiene dominio ___ y rango _____.

2. En el triángulo mostrado, podemos hallar el ángulo θ como sigue:

(a) $\theta = \operatorname{sen}^{-1} \dfrac{\square}{\square}$

(b) $\theta = \cos^{-1} \dfrac{\square}{\square}$

(c) $\theta = \tan^{-1} \dfrac{\square}{\square}$



HABILIDADES

3-6 ■ Encuentre el valor exacto de cada expresión, si está definida.

3. (a) $\operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{2}$ **(b)** $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **(c)** $\tan^{-1}(-1)$

4. (a) $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **(b)** $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ **(c)** $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$

5. (a) $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ **(b)** $\cos^{-1} \frac{1}{2}$ **(c)** $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

6. (a) $\operatorname{sen}^{-1}(-1)$ **(b)** $\cos^{-1} 1$ **(c)** $\tan^{-1} 0$

7-14 ■ Use calculadora para hallar un valor aproximado de cada expresión, redondeado a cinco lugares decimales, si está definido.

7. $\operatorname{sen}^{-1}(0.45)$ **8.** $\cos^{-1}(-0.75$

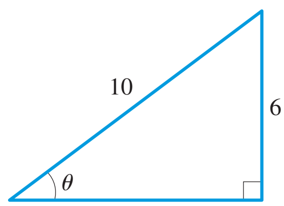
9. $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)$ **10.** $\operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{3}$

11. $\tan^{-1} 3$ **12.** $\tan^{-1}(-4)$

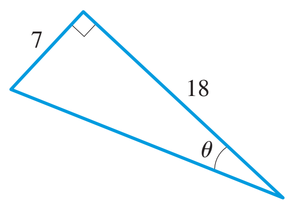
13. $\cos^{-1} 3$ **14.** $\operatorname{sen}^{-1}(-2)$

15-20 ■ Encuentre el ángulo θ en grados, redondeado a un decimal.

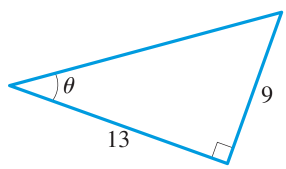
15.



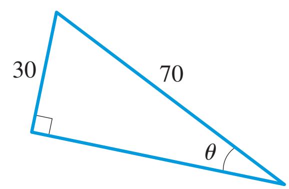
16.



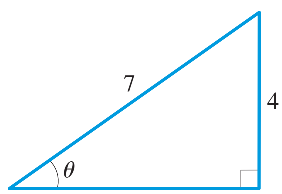
17.



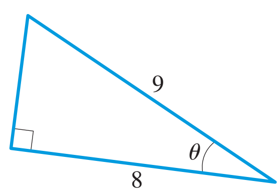
18.



19.



20.



21-26 ■ Encuentre todos los ángulos θ entre 0° y 180° que satisfagan la ecuación dada.

21. $\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2}$ **22.** $\operatorname{sen} \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

23. sen $\theta = 0.7$

24. sen $\theta = \dfrac{1}{4}$

25. cos $\theta = 0.7$

26. cos $\theta = \dfrac{1}{9}$

27-32 ■ Encuentre el valor exacto de la expresión.

27. $\operatorname{sen}(\cos^{-1} \frac{3}{5})$

28. $\tan(\operatorname{sen}^{-1} \frac{4}{5})$

29. $\sec(\operatorname{sen}^{-1} \frac{12}{13})$

30. $\csc(\cos^{-1} \frac{7}{25})$

31. $\tan(\operatorname{sen}^{-1} \frac{12}{13})$

32. $\cot(\operatorname{sen}^{-1} \frac{2}{3})$

33-36 ■ Reescriba la expresión como una expresión algebraica en x.

33. $\cos(\operatorname{sen}^{-1} x)$

34. $\operatorname{sen}(\tan^{-1} x)$

35. $\tan \operatorname{sen}^{-1} x$

36. $\cos \tan^{-1} x$

APLICACIONES

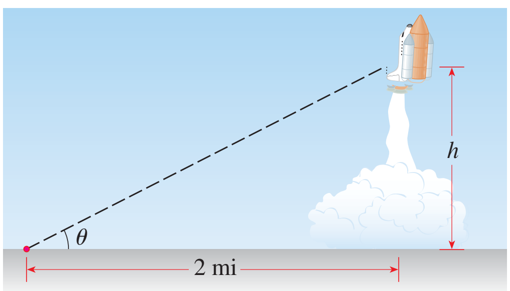
37. Escalera inclinada Una escalera de 20 pies está apoyada contra un edificio. Si la base de la escalera está a 6 pies de la base del edificio, ¿cuál es el ángulo de elevación de la escalera? ¿A qué altura llega la escalera en el edificio?

38. Ángulo del Sol Un árbol de 96 pies proyecta una sombra que mide 120 pies de largo. ¿Cuál es el ángulo de elevación del Sol?

39. Altitud de un transbordador espacial Un observador mira al transbordador espacial desde una distancia de 2 millas de la plataforma de lanzamiento.

(a) Exprese la altitud del transbordador espacial como función del ángulo de elevación θ.

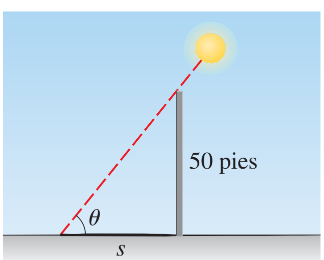
(b) Exprese el ángulo de elevación θ como función de la altitud h del transbordador espacial.



40. Altura de un poste Un poste de 50 pies proyecta una sombra como se ve en la figura.

(a) Exprese el ángulo de elevación θ del Sol como función de la longitud s de la sombra.

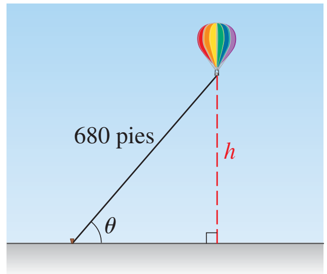
(b) Encuentre el ángulo θ de elevación del Sol cuando la sombra sea de 20 pies de largo.



41. Altitud de un globo Encuentre el ángulo θ si el globo está a una altitud de 500 pies.

(a) Exprese el ángulo como una función de la altura h del globo.

(b) Encuentre el ángulo si el globo está a 500 pies de altura.



42. Vista desde un satélite Las figuras indican que cuanta más alta sea la órbita de un satélite, más se puede "ver" de la Tierra desde el satélite. Sean θ, s y h como en la figura, y suponga que la Tierra es una esfera de radio 3960 millas.

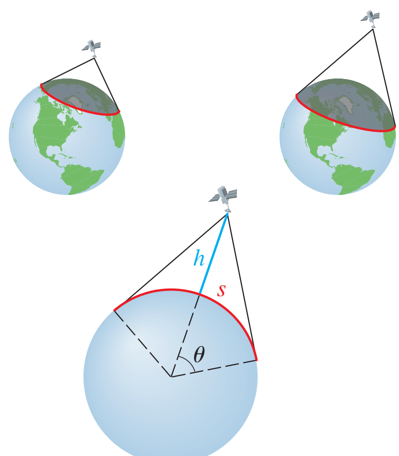
(a) Exprese el ángulo θ como función de h.

(b) Exprese la distancia s como función de θ.

(c) Exprese la distancia s como función de h. [*Sugerencia:* Encuentre la composición de las funciones de las partes (a) y (b).]

(d) Si el satélite está a 100 millas sobre la Tierra, ¿cuál es la distancia s que puede ver?

(e) ¿A qué altura debe estar el satélite para que vea Los Ángeles y Nueva York, que están a 2450 millas entre sí?



43. Surfeando en la ola perfecta Para que se pueda surfear una ola, ésta no puede romper toda a la vez. Robert Guza y Tony Bowen han demostrado que una ola tiene un "hombro" que se puede surfear si golpea la línea de la orilla a un ángulo θ dado por

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{(2n + 1)\tan \beta}\right)$$

donde β es el ángulo al cual la playa hace pendiente y donde $n = 0, 1, 2, \ldots$

(a) Para $\beta = 10°$, encuentre θ cuando $n = 3$.

(b) Para $\beta = 15°$, encuentre θ cuando $n = 2$, 3 y 4. Explique por qué la fórmula no da un valor para θ cuando $n = 0$ o 1.