DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

44. Funciones trigonométricas inversas en una calculadora La mayor parte de las calculadoras no tienen teclas para $\sec^{-1}$, $\csc^{-1}$ o $\cot^{-1}$. Demuestre las siguientes identidades y, a continuación, use estas identidades y una calculadora para hallar $\sec^{-1} 2$, $\csc^{-1} 3$ y $\cot^{-1} 4$.

$$\sec^{-1} x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right), \qquad x \geq 1$$

$$\csc^{-1} x = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right), \qquad x \geq 1$$

$$\cot^{-1} x = \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right), \qquad x > 0$$

6.5 LA LEY DE SENOS

La Ley de Senos ▶ El caso ambiguo

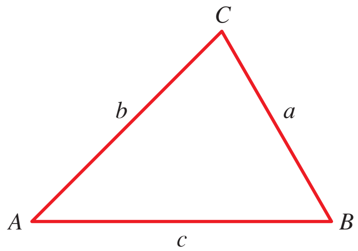
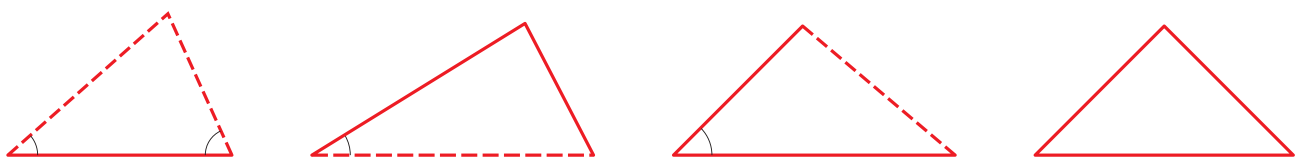


FIGURA 1

En la Sección 6.2 usamos las relaciones trigonométricas para resolver triángulos rectángulos. Las funciones trigonométricas también se pueden usar para resolver *triángulos oblicuángulos,* es decir, triángulos sin ángulos rectos. Para hacer esto, primero estudiamos la Ley de Senos aquí y a continuación la Ley de Cosenos en la siguiente sección. Para expresar estas leyes (o fórmulas) con más facilidad, seguimos la convención de marcar los ángulos de un triángulo como a, b, c, como en la Figura 1.

Para resolver un triángulo, necesitamos conocer cierta información acerca de sus lados y ángulos. Para determinar si tenemos suficiente información, con frecuencia es útil hacer un diagrama. Por ejemplo, si nos dan dos ángulos y el lado entre ellos, entonces es claro que se puede formar un triángulo y sólo uno (vea Figura 2(a)). Análogamente, si se conocen dos lados y el ángulo incluido, entonces se determina un triángulo único (Figura 2(c)). No obstante, si conocemos los tres ángulos pero ninguno de los lados, no podemos determinar de manera única el triángulo porque numerosos triángulos tienen los mismos tres ángulos. (Todos estos triángulos serían semejantes, desde luego.) Por lo tanto, no consideraremos este último caso.



(a) ALA o LAA (b) LLA (c) LAL (d) LLL

FIGURA 2

En general, un triángulo está determinado por tres de sus seis partes (ángulos y lados) mientras al menos una de estas tres partes sea un lado. Por lo tanto, las posibilidades ilustradas en la Figura 2 son como sigue.

Caso 1 Un lado y dos ángulos (ALA o LAA)

Caso 2 Dos lados y el ángulo opuesto a uno de esos lados (LLA)

Caso 3 Dos lados y el ángulo entre ellos (LAL)

Caso 4 Tres lados (LLL)

Los casos 1 y 2 se resuelven usando la Ley de Senos; los Casos 3 y 4 requieren la Ley de Cosenos.

▼ La Ley de Senos

La **Ley de Senos** dice que en cualquier triángulo las longitudes de los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos correspondientes.

LA LEY DE SENOS

En el triángulo ABC tenemos

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$

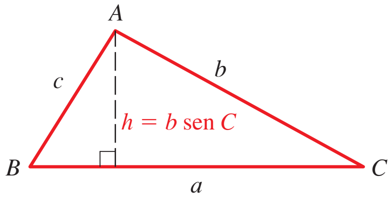


FIGURA 3

DEMOSTRACIÓN Para ver por qué la Ley de Senos es verdadera, consulte la Figura 3. Por la fórmula en la Sección 6.3, el área del triángulo ABC es $\frac{1}{2}ab$ sen C. Por la misma fórmula, el área de este triángulo también es $\frac{1}{2}ac$ sen B y $\frac{1}{2}bc$ sen A. Entonces,

$$\tfrac{1}{2}bc \text{ sen } A = \tfrac{1}{2}ac \text{ sen } B = \tfrac{1}{2}ab \text{ sen } C$$

Multiplicando por $2/(abc)$ resulta la Ley de Senos. ■

EJEMPLO 1 | Rastreo de un satélite (ALA)

Un satélite que gira en órbita alrededor de la Tierra pasa directamente sobre estaciones de observación en Phoenix y Los Ángeles, que están a 340 millas entre sí. En un instante cuando el satélite está entre estas dos estaciones, se observa simultáneamente que su ángulo de elevación es 60° en Phoenix y 75° en Los Ángeles. ¿A qué distancia está el satélite de Los Ángeles?

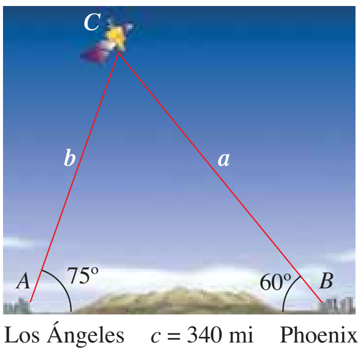


FIGURA 4

SOLUCIÓN Necesitamos hallar la distancia b en la Figura 4. Como la suma de los ángulos en cualquier triángulo es 180°, vemos que $\angle C = 180° - (75° + 60°) = 45°$ (vea Figura 4), de modo que tenemos

$$\frac{\text{sen } B}{b} = \frac{\text{sen } C}{c} \qquad \text{Ley de Senos}$$

$$\frac{\text{sen } 60°}{b} = \frac{\text{sen } 45°}{340} \qquad \text{Sustituya}$$

$$b = \frac{340 \text{ sen } 60°}{\text{sen } 45°} \approx 416 \qquad \text{Despeje } b$$

La distancia del satélite a Los Ángeles es aproximadamente 416 millas.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **5** Y **33** ■

EJEMPLO 2 | Solución de un triángulo (LAA)

Resuelva el triángulo de la Figura 5.

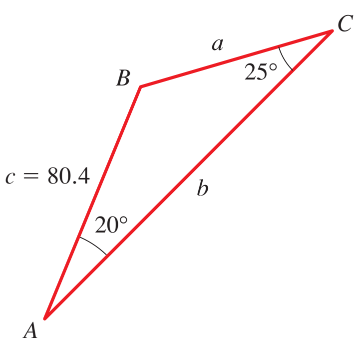


FIGURA 5

SOLUCIÓN Primero, $\angle B = 180° - (20° + 25°) = 135°$. Como se conoce el lado c, para hallar el lado a usamos la relación

$$\frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } C}{c} \qquad \text{Ley de Senos}$$

$$a = \frac{c \text{ sen } A}{\text{sen } C} = \frac{80.4 \text{ sen } 20°}{\text{sen } 25°} \approx 65.1 \qquad \text{Despeje } a$$

Análogamente, para hallar b, usamos

$$\frac{\text{sen } B}{b} = \frac{\text{sen } C}{c} \qquad \text{Ley de Senos}$$

$$b = \frac{c \text{ sen } B}{\text{sen } C} = \frac{80.4 \text{ sen } 135°}{\text{sen } 25°} \approx 134.5 \qquad \text{Despeje } b$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **13** ■

▼ El caso ambiguo

En los Ejemplos 1 y 2 se determinó un triángulo único por medio de la información dada. Esto siempre es cierto para el Caso 1 (ALA o LAA). Pero en el Caso 2 (LLA) puede haber dos triángulos, un triángulo o no haber triángulo con las propiedades dadas. Por esta razón, el Caso 2 a veces se denomina **caso ambiguo**. Para ver por qué esto es así, mostramos en la Figura 6 las posibilidades cuando nos dan el ángulo A y los lados a y b. En el inciso (a) no es posible una solución, porque el lado a es demasiado corto para completar el triángulo. En el inciso (b) la solución es un triángulo rectángulo. En el inciso (c) son posibles dos soluciones, y en el inciso (d) hay un triángulo único con las propiedades dadas. Ilustramos las posibilidades del Caso 2 en los ejemplos siguientes.

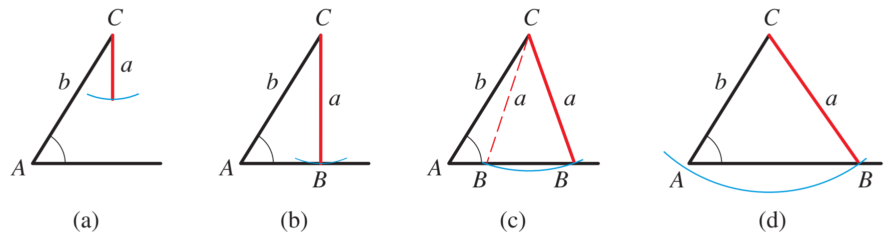


FIGURA 6 El caso ambiguo

EJEMPLO 3 | LLA, el caso de una solución

Resuelva el triángulo ABC, donde $\angle A = 45°$, $a = 7\sqrt{2}$, y $b = 7$.

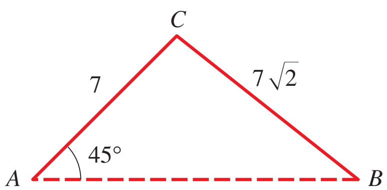


FIGURA 7

SOLUCIÓN Primero trazamos el triángulo con la información que tenemos (vea Figura 7). Nuestro dibujo es necesariamente tentativo porque todavía no conocemos los otros ángulos, pero podemos ver ahora las posibilidades.

Primero hallamos $\angle B$.

$$\frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } B}{b} \qquad \text{Ley de Senos}$$

$$\text{sen } B = \frac{b \text{ sen } A}{a} = \frac{7}{7\sqrt{2}} \text{ sen } 45° = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} \qquad \text{Despeje sen } B$$

Consideramos sólo ángulos menores a 180°, porque no hay triángulo que pueda contener un ángulo de 180° o mayor.

¿Cuáles ángulos B tienen sen $B = \frac{1}{2}$? De la sección precedente sabemos que hay dos de estos ángulos menores a 180° (son 30° y 150°). ¿Cuál de estos ángulos es compatible con lo que sabemos acerca del triángulo ABC? Como $\angle A = 45°$, no podemos tener $\angle B = 150°$ porque $45° + 150° > 180°$. Por lo tanto, $\angle B = 30°$ y el ángulo restante es $\angle C = 180° - (30° + 45°) = 105°$.

Ahora podemos hallar el lado c.

$$\frac{\text{sen } B}{b} = \frac{\text{sen } C}{c} \qquad \text{Ley de Senos}$$

$$c = \frac{b \text{ sen } C}{\text{sen } B} = \frac{7 \text{ sen } 105°}{\text{sen } 30°} = \frac{7 \text{ sen } 105°}{\frac{1}{2}} \approx 13.5 \qquad \text{Despeje } c$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **19**

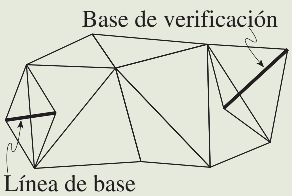
En el Ejemplo 3 hay dos posibilidades para el ángulo B y una de éstas no era compatible con el resto de la información. En general, si sen $A < 1$, debemos comprobar el ángulo y su suplemento como posibilidades, porque cualquier ángulo menor a 180° puede estar en el triángulo. Para determinar si funciona cualquiera de las dos posibilidades, vemos si la suma resultante de los ángulos excede de 180°. Puede ocurrir, como en la Figura 6(c), que ambas posibilidades son compatibles con la información dada. En ese caso, dos triángulos diferentes son soluciones al problema.

El *suplemento* de un ángulo θ (donde $0 \leq \theta \leq 180°$) es el ángulo $180° - \theta$.

EJEMPLO 4 | LLA, el caso de dos soluciones

Resuelva el triángulo ABC si $\angle A = 43.1°$, $a = 186.2$ y $b = 248.6$.

La **topografía** es un método de medir tierras, que se utiliza para hacer mapas. Los topógrafos usan un proceso llamado *triangulación* en el que se crea una red de miles de triángulos entrelazados en la región de la que se ha de hacer un mapa. El proceso se inicia al medir la longitud de una *línea de base* entre dos estaciones de topografía. A continuación, con el uso de un instrumento llamado *teodolito*, se miden los ángulos entre estas dos estaciones y una tercera estación. El siguiente paso es usar la Ley de Senos para calcular los otros dos lados del triángulo formado por las tres estaciones. Los lados calculados se usan como líneas de base, y el proceso se repite una y otra vez para crear una red de triángulos. En este método, la única distancia medida es la línea de base inicial; todas las otras distancias se calculan a partir de la Ley de Senos. Este método es práctico porque es mucho más fácil medir ángulos que distancias.



Uno de los esfuerzos más ambiciosos de todos los tiempos, para hacer mapas, fue el Gran Levantamiento Topográfico de la India (vea problema 8, página 492) que requirió de varias expediciones y tardó más de un siglo en completarse. La famosa expedición de 1823 dirigida por **Sir George Everest** duró 20 años. Pasando sobre terrenos engañosos y encontrando los temibles mosquitos portadores del paludismo, esta expedición llegó a la base de la cordillera del Himalaya. Una expedición posterior, usando triangulación, calculó que la altura del pico más alto de los Himalaya era de 29,002 pies; ese pico recibió el nombre de Everest en honor a Sir George Everest.

Hoy en día, con el uso de satélites, se estima que la altura del Monte Everest es de 29,028 pies. La muy cercana proximidad de estas dos estimaciones muestra la gran precisión del método trigonométrico.

SOLUCIÓN Con la información dada, trazamos el triángulo que se ve en la Figura 8. Observe que el lado a puede trazarse en dos posiciones posibles para completar el triángulo. De la Ley de Senos

$$\operatorname{sen} B = \frac{b \operatorname{sen} A}{a} = \frac{248.6 \operatorname{sen} 43.1°}{186.2} \approx 0.91225$$

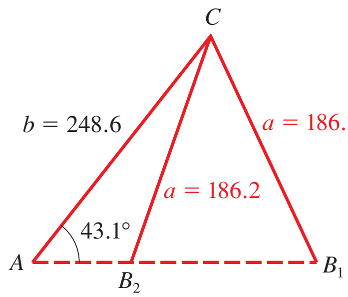


FIGURA 8

Hay dos posibles ángulos B entre 0° y 180° tales que $\operatorname{sen} B = 0.91225$. Usando una calculadora, encontramos que uno de los ángulos es $\operatorname{sen}^{-1}(0.91225) \approx 65.8°$. El otro ángulo es aproximadamente $180° - 65.8° = 114.2°$. Denotamos estos dos ángulos por B_1 y B_2 de modo que

$$\angle B_1 \approx 65.8° \qquad \text{y} \qquad \angle B_2 \approx 114.2°$$

Entonces dos triángulos satisfacen las condiciones dadas: el triángulo AB_1C_1 y el triángulo AB_2C_2.

Resuelva el triángulo AB_1C_1:

$$\angle C_1 \approx 180° - (43.1° + 65.8°) = 71.1° \qquad \text{Encuentre } \angle C_1$$

Así, $$c_1 = \frac{a_1 \operatorname{sen} C_1}{\operatorname{sen} A} \approx \frac{186.2 \operatorname{sen} 71.1°}{\operatorname{sen} 43.1°} \approx 257.8 \qquad \text{Ley de Senos}$$

Resuelva el triángulo AB_2C_2:

$$\angle C_2 \approx 180° - (43.1° + 114.2°) = 22.7° \qquad \text{Encuentre } \angle C_2$$

Así, $$c_2 = \frac{a_2 \operatorname{sen} C_2}{\operatorname{sen} A} \approx \frac{186.2 \operatorname{sen} 22.7°}{\operatorname{sen} 43.1°} \approx 105.2 \qquad \text{Ley de Senos}$$

Los triángulos AB_1C_1 y AB_2C_2 se ven en la Figura 9.

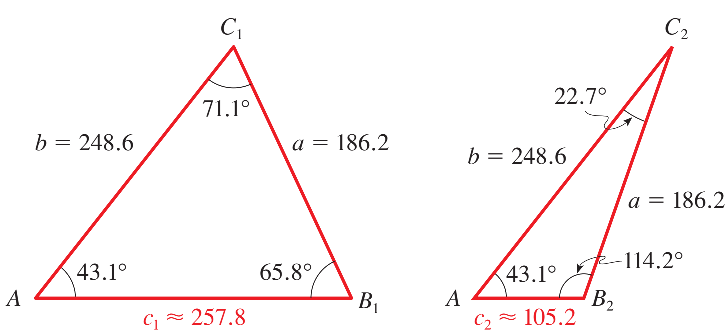


FIGURA 9

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **23**

El siguiente ejemplo presenta una situación para la cual no hay un triángulo compatible con la información dada.

EJEMPLO 5 | LLA, el caso sin solución

Resuelva el triángulo ABC, donde $\angle A = 42°$, $a = 70$ y $b = 122$.

SOLUCIÓN Para organizar la información dada, trazamos el diagrama de la Figura 10. Tratemos de hallar el $\angle B$. Tenemos

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} \qquad \text{Ley de Senos}$$

$$\operatorname{sen} B = \frac{b \operatorname{sen} A}{a} = \frac{122 \operatorname{sen} 42°}{70} \approx 1.17 \qquad \text{Despeje sen } B$$

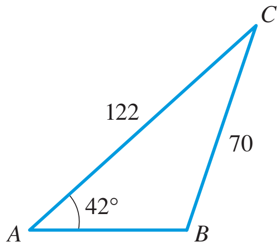


FIGURA 10

Como el seno de un ángulo nunca es mayor a 1, concluimos que no hay triángulo que satisfaga las condiciones dadas en este problema.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **21**

6.5 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. En el triángulo ABC con lados a, b y c la Ley de Senos dice que

$$\frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$

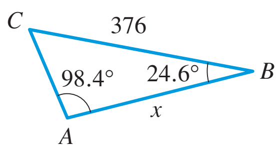
2. ¿En cuál de los siguientes casos podemos usar la Ley de Senos para resolver un triángulo?

ALA LLL LAL LLA

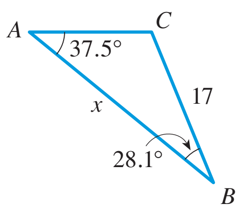
HABILIDADES

3-8 ■ Use la Ley de Senos para hallar el lado x o ángulo θ indicados.

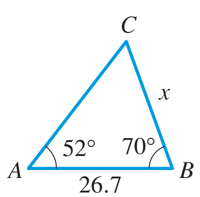
3.



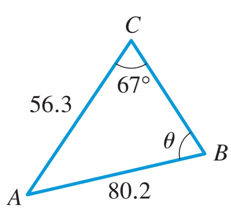
4.



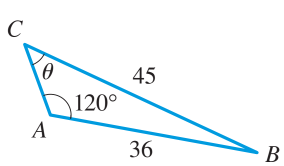
5.



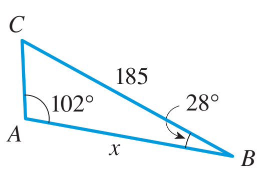
6.



7.

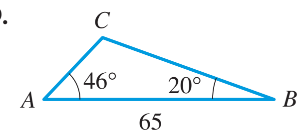


8.

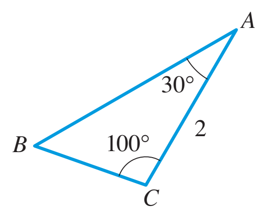


9-12 ■ Resuelva el triángulo usando la Ley de Senos.

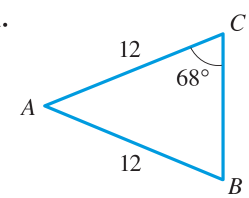
9.



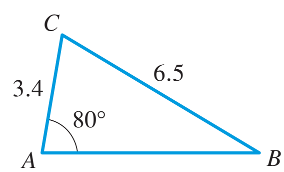
10.



11.



12.



13-18 ■ Trace cada triángulo y a continuación resuelva el triángulo usando la Ley de Senos.

13. $\angle A = 50°$, $\angle B = 68°$, $c = 230$

14. $\angle A = 23°$, $\angle B = 110°$, $c = 50$

15. $\angle A = 30°$, $\angle C = 65°$, $b = 10$

16. $\angle A = 22°$, $\angle B = 95°$, $a = 420$

17. $\angle B = 29°$, $\angle C = 51°$, $b = 44$

18. $\angle B = 10°$, $\angle C = 100°$, $c = 115$

19-28 ■ Use la Ley de Senos para despejar todos los posibles triángulos que satisfacen las condiciones dadas.

19. $a = 28$, $b = 15$, $\angle A = 110°$

20. $a = 30$, $c = 40$, $\angle A = 37°$

21. $a = 20$, $c = 45$, $\angle A = 125°$

22. $b = 45$, $c = 42$, $\angle C = 38°$

23. $b = 25, \quad c = 30, \quad \angle B = 25°$

24. $a = 75, \quad b = 100, \quad \angle A = 30°$

25. $a = 50, \quad b = 100, \quad \angle A = 50°$

26. $a = 100, \quad b = 80, \quad \angle A = 135°$

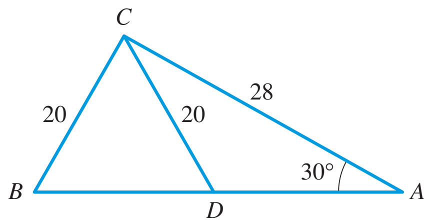
27. $a = 26, \quad c = 15, \quad \angle C = 29°$

28. $b = 73, \quad c = 82, \quad \angle B = 58°$

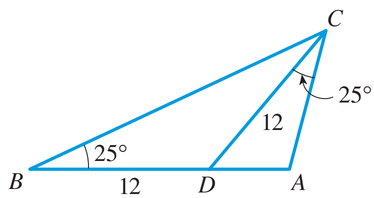
29. Para el triángulo mostrado, encuentre

(a) $\angle BCD$ y

(b) $\angle DCA$.



30. Para el triángulo mostrado, encuentre la longitud AD.



31. En el triángulo ABC, $\angle A = 40°$, $a = 15$, y $b = 20$.

(a) Demuestre que hay dos triángulos, ABC y $A'B'C'$, que satisfacen estas condiciones.

(b) Demuestre que las áreas de los triángulos en el inciso (a) son proporcionales a los senos de los ángulos C y C', es decir,

$$\frac{\text{área de } \triangle ABC}{\text{área de } \triangle A'B'C'} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} C'}$$

32. Demuestre que, dados los tres ángulos A, B, C de un triángulo y un lado, a por ejemplo, el área del triángulo es

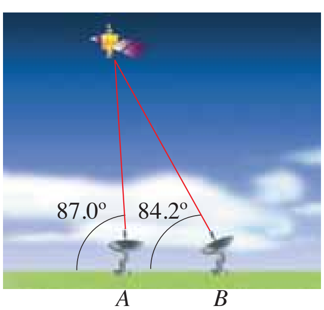
$$\text{área} = \frac{a^2 \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{2 \operatorname{sen} A}$$

APLICACIONES

33. Rastreo de un satélite La trayectoria de un satélite, que gira en órbita alrededor de la Tierra, hace que el satélite pase directamente sobre dos estaciones de rastreo A y B, que están a 50 millas una de otra. Cuando el satélite está en un lado de las dos estaciones, los ángulos de elevación en A y B se miden y resultan de 87.0° y 84.2°, respectivamente.

(a) ¿A qué distancia está el satélite de la estación A?

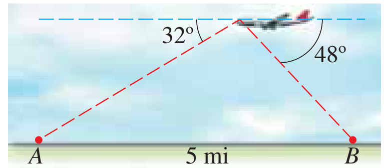
(b) ¿Cuál es la altura del satélite sobre la Tierra?



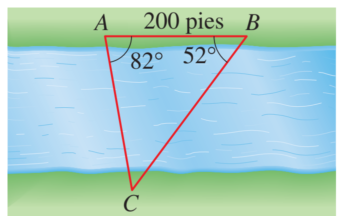
34. Vuelo de un avión Un piloto está volando sobre una carretera recta. Él determina los ángulos de depresión a dos señales de distancia, colocadas a 5 millas entre sí, y encuentra que son de 32° y 48° como se muestra en la figura.

(a) Encuentre la distancia entre el avión y el punto A.

(b) Encuentre la elevación del avión.



35. Distancia entre márgenes de un río Para hallar la distancia de una orilla a la otra de un río, una experta en topografía escoge los puntos A y B, que están a 200 pies entre sí en un lado del río (vea la figura). A continuación, ella escoge un punto de referencia C en el lado opuesto del río y encuentra que $\angle BAC \approx 82°$ y $\angle ABC \approx 52°$. Aproxime la distancia de A a C.

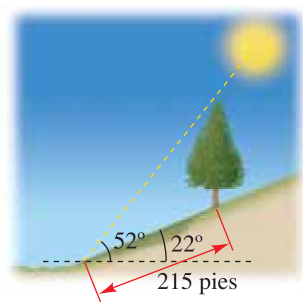


36. Distancia de una orilla a otra de un lago Los puntos A y B están separados por un lago. Para hallar la distancia entre ellos, un topógrafo localiza un punto C en tierra de manera que $\angle CAB = 48.6°$. También mide CA como 312 pies y CB como 527 pies. Encuentre la distancia entre A y B.

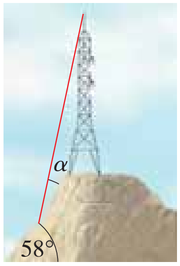
37. La Torre Inclinada de Pisa El campanario de la catedral de Pisa, Italia, está inclinado 5.6° con respecto a la vertical. Una turista está de pie a 105 m de su base, con la torre inclinada directamente hacia ella. Ella mide el ángulo de elevación a lo alto de la torre y ve que es de 29.2°. Encuentre la longitud de la torre al metro más cercano.

38. Antena de radio Una antena de radio de onda corta está sostenida por dos cables de retenida (vientos), de 165 pies y 180 pies de largo. Cada cable está unido a lo alto de la antena y anclado al suelo, en dos puntos de anclaje en lados opuestos de la antena. El cable más corto forma un ángulo de 67° con el suelo. ¿A qué distancia están entre sí los puntos de anclaje?

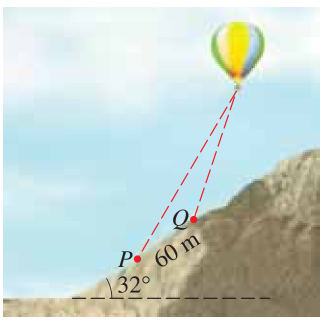
39. Altura de un árbol Un árbol en una ladera proyecta una sombra de 215 pies ladera abajo. Si el ángulo de inclinación de la ladera es 22° con respecto a la horizontal y el ángulo de elevación del Sol es 52°, encuentre la altura del árbol.



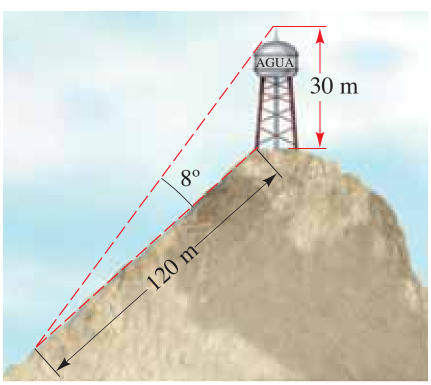
40. Longitud de un alambre de retenida Una torre de comunicaciones está situada en lo alto de un empinado cerro, como se ve en la figura. El ángulo de inclinación del cerro es 58°. Un alambre de retenida se ha de unir a lo alto de la torre y al suelo, a 100 metros colina abajo desde la base de la torre. El ángulo α de la figura está determinado como de 12°. Encuentre la longitud del cable requerido para el alambre de retenida.



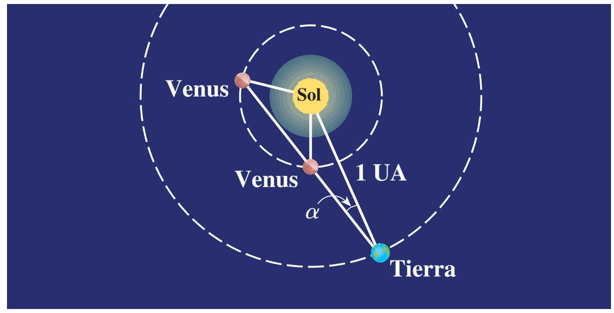
41. Cálculo de una distancia Observadores en P y Q están localizados en el costado de un cerro que está inclinado 32° con la horizontal, como se muestra. El observador en P determina que el ángulo de elevación a un globo de aire caliente es de 62°. Al mismo tiempo, el observador en Q mide el ángulo de elevación al globo y ve que es de 71°. Si P está 60 metros colina abajo desde Q, encuentre la distancia de Q al globo.



42. Cálculo de un ángulo Una torre de 30 m para agua está situada en lo alto de un cerro. De una distancia de 120 m bajando por el cerro, se observa que el ángulo formado entre lo alto y la base de la torre es de 8°. Encuentre el ángulo de inclinación del cerro.



43. Distancias a Venus La *elongación* α de un planeta es el ángulo formado por el planeta, la Tierra y el Sol (vea la figura). Se sabe que la distancia del Sol a Venus es 0.723 UA (vea Ejercicio 65 en la Sección 6.2). En cierto instante, se ve que la elongación de Venus es de 39.4°. Encuentre las posibles distancias de la Tierra a Venus en ese momento en unidades astronómicas (UA).



44. Burbujas de jabón Cuando dos burbujas de unen entre sí en el aire, su superficie común es parte de una esfera cuyo centro D está en la línea que pasa por los centros de las burbujas (vea la figura). También, los ángulos ACB y ACD miden 60° cada uno de ellos.

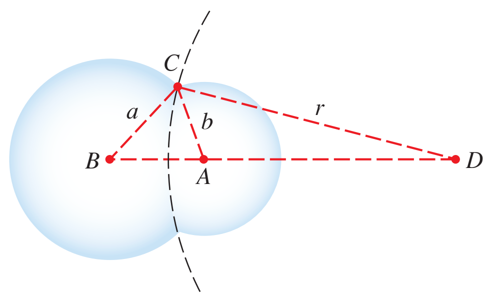
(a) Demuestre que el radio r de la cara común está dado por

$$r = \frac{ab}{a - b}$$

[*Sugerencia:* Use la Ley de Senos junto con el hecho de que un ángulo θ y su suplemento $180° - \theta$ tienen el mismo seno.]

(b) Encuentre el radio de la cara común si los radios de las burbujas son 4 cm y 3 cm.

(c) ¿Qué forma toma la cara común si las dos burbujas tienen radios iguales?



DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

45. Número de soluciones en el caso ambiguo Hemos visto que cuando se usa la Ley de Senos para resolver un triángulo en el caso LLA, puede haber dos soluciones, una solución o ninguna. Trace ángulos como los de la Figura 6 para verificar los criterios de la tabla para el número de soluciones, si nos dan $\angle A$ y los lados a y b.

Criterio	Número de soluciones
$a \geq b$	1
$b > a > b \operatorname{sen} A$	2
$a = b \operatorname{sen} A$	1
$a < b \operatorname{sen} A$	0

Si $\angle A = 30°$ y $b = 100$, use estos criterios para hallar el intervalo de valores de a para los cuales el triángulo ABC tiene dos soluciones, una solución o ninguna solución.

6.6 La Ley de Cosenos

La Ley de Cosenos ▶ Navegación: orientación y rumbo ▶ El área de un triángulo

▼ La Ley de Cosenos

La Ley de Senos no se puede usar directamente para resolver triángulos si conocemos dos lados y el ángulo entre ellos, o si conocemos los tres lados (Casos 3 y 4 de la sección precedente). En estos dos casos aplica la **Ley de Cosenos**.

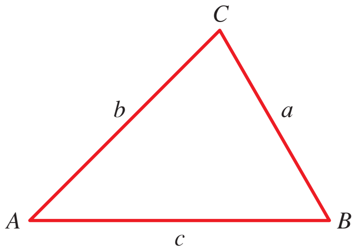


FIGURA 1

LA LEY DE COSENOS

En cualquier triángulo ABC (vea Figura 1), tenemos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

DEMOSTRACIÓN Para probar la Ley de Cosenos, ponga el triángulo ABC de modo que $\angle A$ esté en el origen, como se muestra en la Figura 2. Las coordenadas de los vértices B y C son $(c, 0)$ y $(b \cos A, b \operatorname{sen} A)$, respectivamente. (El lector debe comprobar que las coordenadas de estos puntos serán las mismas si trazamos el ángulo A como ángulo agudo.) Usando la Fórmula de Distancias, obtenemos

$$\begin{aligned} a^2 &= (b \cos A - c)^2 + (b \operatorname{sen} A - 0)^2 \\ &= b^2 \cos^2 A - 2bc \cos A + c^2 + b^2 \operatorname{sen}^2 A \\ &= b^2(\cos^2 A + \operatorname{sen}^2 A) - 2bc \cos A + c^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \qquad \text{Porque } \operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1 \end{aligned}$$

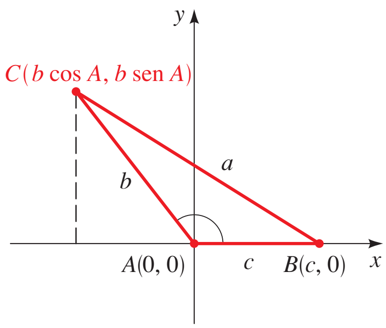


FIGURA 2

Esto prueba la primera fórmula. Las otras dos fórmulas se obtienen de la misma forma si se coloca cada uno de los otros vértices del triángulo en el origen y se repite el argumento precedente. ■

En palabras, la Ley de Cosenos dice que el cuadrado de cualquier lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble producto de esos dos lados por el coseno del ángulo incluido.

Si uno de los ángulos de un triángulo, por ejemplo $\angle C$, es un ángulo recto, entonces $\cos C = 0$ y la Ley de Cosenos se reduce al Teorema de Pitágoras, $c^2 = a^2 + b^2$. Por lo tanto, el Teorema de Pitágoras es un caso especial de la Ley de Cosenos.

EJEMPLO 1 | Longitud de un túnel

Un túnel se ha de construir por una montaña. Para estimar la longitud del túnel, un topógrafo hace las mediciones que se ven en la Figura 3. Use la información del topógrafo para aproximar la longitud del túnel.

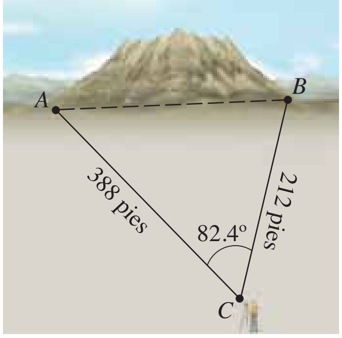


FIGURA 3

SOLUCIÓN Para aproximar la longitud c del túnel, usamos la Ley de Cosenos:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C && \text{Ley de Cosenos} \\ &= 388^2 + 212^2 - 2(388)(212) \cos 82.4° && \text{Sustituya} \\ &\approx 173730.2367 && \text{Use calculadora} \\ c &\approx \sqrt{173730.2367} \approx 416.8 && \text{Tome raíces cuadradas} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el túnel será de aproximadamente 417 pies de largo.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **3** Y **39** ■

EJEMPLO 2 | LLL, la Ley de Cosenos

Los lados de un triángulo son $a = 5$, $b = 8$ y $c = 12$ (vea Figura 4). Encuentre los ángulos del triángulo.

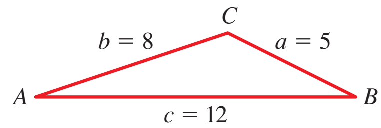


FIGURA 4

SOLUCIÓN Primero hallamos $\angle A$. De la Ley de Cosenos, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$. Despejando $\cos A$, obtenemos

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{8^2 + 12^2 - 5^2}{2(8)(12)} = \frac{183}{192} = 0.953125$$

COS⁻¹ o INV COS o ARC COS

Usando una calculadora, encontramos que $\angle A = \cos^{-1}(0.953125) \approx 18°$. En la misma forma obtenemos

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{5^2 + 12^2 - 8^2}{2(5)(12)} = 0.875$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{5^2 + 8^2 - 12^2}{2(5)(8)} = -0.6875$$

Usando una calculadora, encontramos que

$$\angle B = \cos^{-1}(0.875) \approx 29° \qquad \text{y} \qquad \angle C = \cos^{-1}(-0.6875) \approx 133°$$

Desde luego, una vez calculados dos ángulos, el tercero se puede hallar más fácilmente del hecho de que la suma de los ángulos de un triángulo es 180°. No obstante, es buena idea calcular los tres ángulos usando la Ley de Cosenos y sumar los tres ángulos como prueba en los cálculos.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **7**

EJEMPLO 3 | LAL, la Ley de Cosenos

Resuelva el triángulo ABC, donde $\angle A = 46.5°$, $b = 10.5$ y $c = 18.0$.

SOLUCIÓN Podemos hallar a usando la Ley de Cosenos.

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ &= (10.5)^2 + (18.0)^2 - 2(10.5)(18.0)(\cos 46.5°) \approx 174.05 \end{aligned}$$

Entonces, $a \approx \sqrt{174.05} \approx 13.2$. También usamos la Ley de Cosenos para hallar $\angle B$ y $\angle C$, como en el Ejemplo 2.

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{13.2^2 + 18.0^2 - 10.5^2}{2(13.2)(18.0)} \approx 0.816477$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{13.2^2 + 10.5^2 - 18.0^2}{2(13.2)(10.5)} \approx -0.142532$$

Usando calculadora, encontramos que

$$\angle B = \cos^{-1}(0.816477) \approx 35.3° \qquad \text{y} \qquad \angle C = \cos^{-1}(-0.142532) \approx 98.2°$$

Para resumir: $\angle B \approx 35.3°$, $\angle C \approx 98.2°$ y $a \approx 13.2$. (Vea Figura 5.)

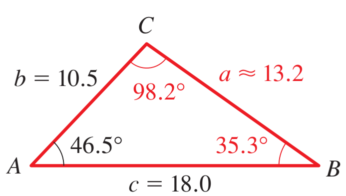


FIGURA 5

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **13**

Podríamos haber usado la Ley de Senos para hallar $\angle B$ y $\angle C$ en el Ejemplo 3, porque conocíamos los tres lados y un ángulo del triángulo. Pero, conocer el seno de un ángulo no especifica de manera única el ángulo, porque un ángulo θ y su suplemento $180° - \theta$ tienen ambos el mismo seno. Entonces, necesitaríamos determinar cuál de los dos ángulos es la selección correcta. Esta ambigüedad no aparece cuando usamos la Ley de Cosenos, porque todo ángulo entre 0° y 180° tiene un coseno único. Por lo tanto, usar sólo la Ley de Cosenos es preferible en problemas como el Problema 3.

▼ Navegación: orientación y rumbo

En navegación, es frecuente que una dirección se dé como **rumbo**, es decir, como un ángulo agudo medido directamente del norte o del sur. El rumbo N 30° E, por ejemplo, indica una dirección que apunta 30° al este del norte (vea Figura 6).

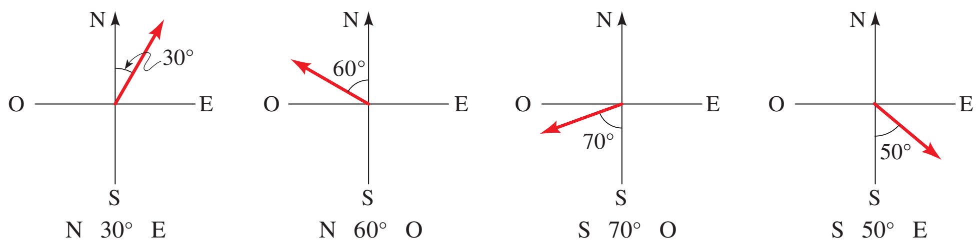


FIGURA 6

EJEMPLO 4 | Navegación

Un piloto sale de un aeropuerto y hace rumbo en la dirección N 20° E, volando a 200 mi/h. Después de una hora, hace una corrección de curso y hace rumbo en la dirección N 40° E. Media hora después de esto, problemas en los motores lo obligan a hacer un aterrizaje de emergencia.

(a) Encuentre la distancia entre el aeropuerto y su punto final de aterrizaje.

(b) Encuentre el rumbo del aeropuerto a su punto final de aterrizaje.

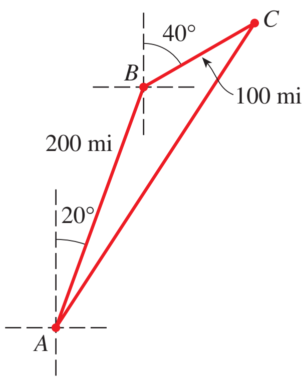


FIGURA 7

SOLUCIÓN

(a) En una hora el avión viaja 200 millas y, en media hora, 100 millas, de modo que podemos localizar el curso del piloto como en la Figura 7. Cuando hace la corrección de su curso, vira 20° a la derecha, de modo que el ángulo entre los dos catetos de su viaje es 180° − 20° = 160°. Entonces, por la Ley de Cosenos, tenemos

$$\begin{aligned} b^2 &= 200^2 + 100^2 - 2 \cdot 200 \cdot 100 \cos 160^\circ \\ &\approx 87{,}587.70 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $b \approx 295.95$. El piloto aterriza a unas 296 millas de su punto de partida.

(b) Primero usamos la Ley de Senos para hallar $\angle A$.

$$\frac{\text{sen } A}{100} = \frac{\text{sen } 160^\circ}{295.95}$$

$$\text{sen } A = 100 \cdot \frac{\text{sen } 160^\circ}{295.95}$$

$$\approx 0.11557$$

Otro ángulo con seno 0.11557 es 180° − 6.636° = 173.364°. Pero éste es claramente demasiado grande para ser $\angle A$ en $\angle ABC$.

Usando la tecla SEN⁻¹ en una calculadora, hallamos que $\angle A \approx 6.636°$. De la Figura 7 vemos que la línea del aeropuerto al punto final de aterrizaje apunta en la dirección 20° + 6.636° = 26.636° al este del norte. En consecuencia, el rumbo es aproximadamente N 26.6° E.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **45** ■

El área de un triángulo

Una aplicación interesante de la Ley de Cosenos involucra una fórmula para hallar el área de un triángulo a partir de las longitudes de sus tres lados (vea Figura 8).

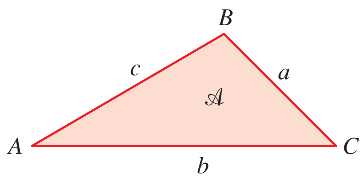


FIGURA 8

> **FÓRMULA DE HERÓN**
>
> El área $\mathscr{A}$ de un triángulo ABC está dada por
>
> $$\mathscr{A} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
>
> donde $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ es el **semiperímetro** del triángulo; esto es, s es la mitad del perímetro.

DEMOSTRACIÓN Empezamos con la fórmula $\mathscr{A} = \frac{1}{2}ab \operatorname{sen} C$ de la Sección 6.3. Así,

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}^2 &= \tfrac{1}{4}a^2b^2 \operatorname{sen}^2 C \\
&= \tfrac{1}{4}a^2b^2(1-\cos^2 C) && \text{Identidad de Pitágoras} \\
&= \tfrac{1}{4}a^2b^2(1-\cos C)(1+\cos C) && \text{Factorice}
\end{aligned}$$

A continuación, escribimos las expresiones $1-\cos C$ y $1+\cos C$ en términos de a, b y c. Por la Ley de Cosenos tenemos

$$\begin{aligned}
\cos C &= \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} && \text{Ley de Cosenos} \\
1+\cos C &= 1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} && \text{Sume 1} \\
&= \frac{2ab+a^2+b^2-c^2}{2ab} && \text{Común denominador} \\
&= \frac{(a+b)^2-c^2}{2ab} && \text{Factorice} \\
&= \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2ab} && \text{Diferencia de cuadrados}
\end{aligned}$$

Análogamente

$$1-\cos C = \frac{(c+a-b)(c-a+b)}{2ab}$$

Sustituyendo estas expresiones en la fórmula que obtuvimos para $\mathscr{A}^2$ resulta

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}^2 &= \tfrac{1}{4}a^2b^2\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2ab}\,\frac{(c+a-b)(c-a+b)}{2ab} \\
&= \frac{(a+b+c)}{2}\,\frac{(a+b-c)}{2}\,\frac{(c+a-b)}{2}\,\frac{(c-a+b)}{2} \\
&= s(s-c)(s-b)(s-a)
\end{aligned}$$

Para ver que los factores de los últimos dos productos son iguales, observe por ejemplo que

$$\begin{aligned}
\frac{a+b-c}{2} &= \frac{a+b+c}{2} - c \\
&= s-c
\end{aligned}$$

La Fórmula de Herón se obtiene al tomar la raíz cuadrada de cada lado. ■

FIGURA 9

EJEMPLO 5 | Área de un lote

Un negociante desea comprar un lote triangular en una zona de gran movimiento en el centro de una ciudad (vea Figura 9). Los frentes del lote en las tres calles adyacentes miden 125, 280 y 315 pies. Encuentre el área del lote.

SOLUCIÓN El semiperímetro del lote es

$$s = \frac{125 + 280 + 315}{2} = 360$$

Por la Fórmula de Herón el área es

$$\mathscr{A} = \sqrt{360(360 - 125)(360 - 280)(360 - 315)} \approx 17{,}451.6$$

Entonces, el área es aproximadamente 17, 452 pies^2.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **29** Y **53**

6.6 EJERCICIOS

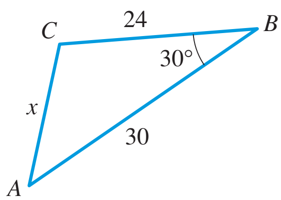
CONCEPTOS

1. Para el triángulo ABC con lados a, b y c la Ley de Cosenos dice que $c^2 =$ ____________________.

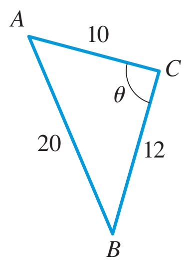
2. ¿En cuál de los siguientes casos debe usarse la Ley de Cosenos para resolver un triángulo?

ALA LLL LAL LLA

9.



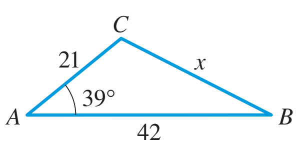
10.



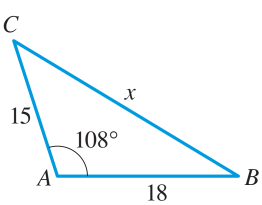
HABILIDADES

3-10 ■ Use la Ley de Cosenos para determinar el lado x indicado o el ángulo θ.

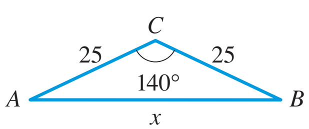
3.



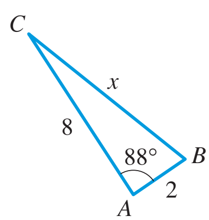
4.



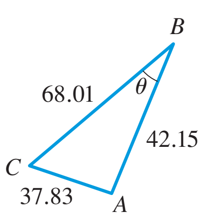
5.



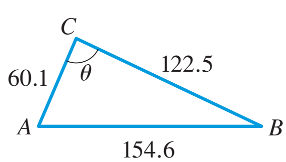
6.



7.

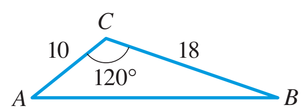


8.

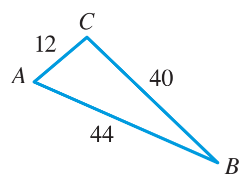


11-20 ■ Resuelva el triángulo ABC.

11.



12.



13. $a = 3.0$, $b = 4.0$, $\angle C = 53°$

14. $b = 60$, $c = 30$, $\angle A = 70°$

15. $a = 20$, $b = 25$, $c = 22$

16. $a = 10$, $b = 12$, $c = 16$

17. $b = 125$, $c = 162$, $\angle B = 40°$

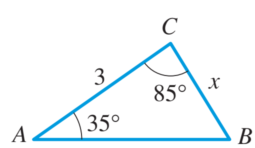
18. $a = 65$, $c = 50$, $\angle C = 52°$

19. $a = 50$, $b = 65$, $\angle A = 55°$

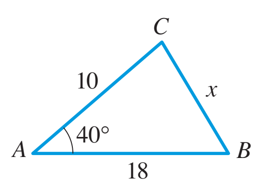
20. $a = 73.5$, $\angle B = 61°$, $\angle C = 83°$

21-28 ■ Encuentre el lado indicado x o el ángulo θ. (Use ya sea la Ley de Senos o la Ley de Cosenos, según sea apropiado.)

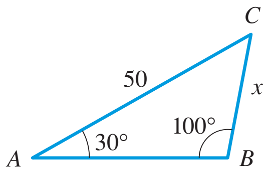
21.



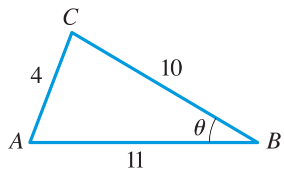
22.



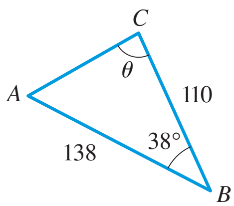
23.



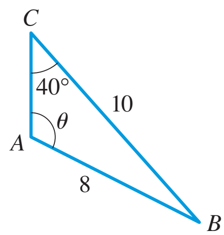
24.



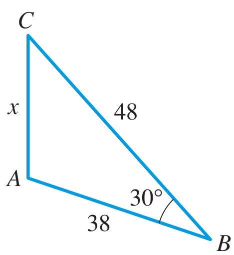
25.



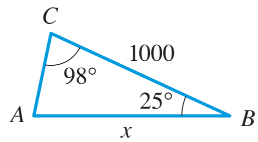
26.



27.



28.



29-32 ■ Encuentre el área del triángulo cuyos lados tienen las longitudes dadas.

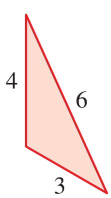
29. $a = 9$, $b = 12$, $c = 15$ **30.** $a = 1$, $b = 2$, $c = 2$

31. $a = 7$, $b = 8$, $c = 9$

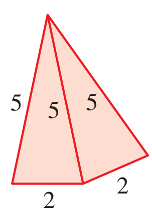
32. $a = 11$, $b = 100$, $c = 101$

33-36 ■ Encuentre el área de la figura sombreada, redondeada a dos lugares decimales.

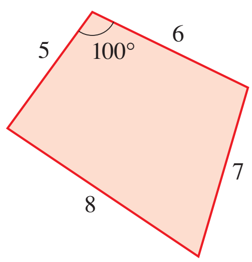
33.



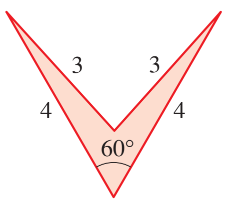
34.



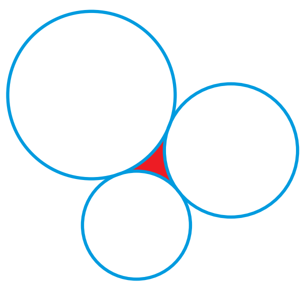
35.



36.



37. Tres círculos de radios 4, 5 y 6 cm son mutuamente tangentes. Encuentre el área sombreada encerrada entre los círculos.



38. Demuestre que en el triángulo ABC

$$a = b \cos C + c \cos B$$

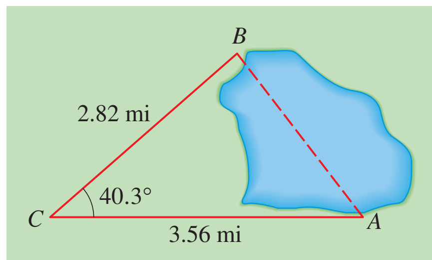
$$b = c \cos A + a \cos C$$

$$c = a \cos B + b \cos A$$

Éstas reciben el nombre de *Leyes de Proyección.* [*Sugerencia:* Para obtener la primera ecuación, sume las ecuaciones segunda y tercera en la Ley de Cosenos y despeje a.]

APLICACIONES

39. Topografía Para hallar la distancia de un lado a otro de un pequeño lago, un topógrafo ha tomado las mediciones que se ilustran. Encuentre la distancia de un lado a otro del lago usando esta información.



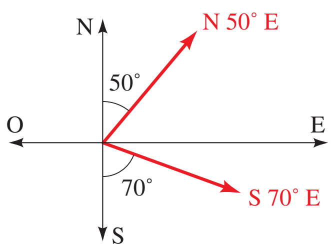
40. Geometría Un paralelogramo tiene lados de longitudes 3 y 5, y un ángulo es de 50°. Encuentre las longitudes de las diagonales.

41. Cálculo de una distancia Dos carreteras rectas divergen en un ángulo de 65°. Dos autos salen del crucero a las 2:00 a.m. uno de ellos corriendo a 50 mi/h y el otro a 30 mi/h. ¿A qué distancia entre sí están los autos a las 2:30 p.m.?

42. Cálculo de una distancia Un auto viaja por una carretera recta, dirigiéndose al este durante 1 hora, y luego corre 30 minutos en otro camino con dirección al noreste. Si el auto ha mantenido una velocidad constante de 40 mi/h, ¿a qué distancia está de su posición inicial?

43. Situación por estima Una aviadora vuela en una trayectoria recta durante 1 h 30 min. Entonces hace una corrección de curso, dirigiéndose 10° a la derecha de su curso original, y vuela 2 horas en la nueva dirección. Si ella mantiene una velocidad constante de 625 mi/h, ¿a qué distancia está de su posición inicial?

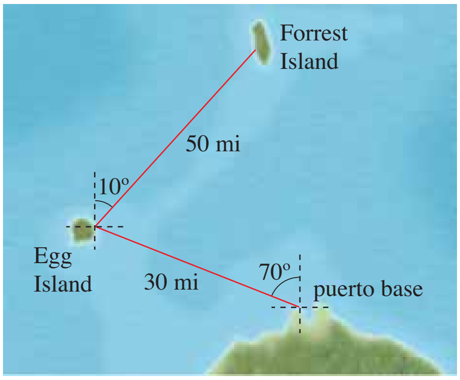
44. Navegación Dos botes salen del mismo puerto al mismo tiempo. Uno de ellos navega a una velocidad de 30 mi/h en la dirección N 50° E y, el otro, viaja a una velocidad de 26 mi/h en una dirección S 70° E (vea la figura). ¿A qué distancia están entre sí los dos botes después de una hora?



45. Navegación Un pescador sale de su puerto base y navega en dirección N 70° O. Viaja 30 minutos y llega a Egg Island. Al día siguiente navega al N 10° E durante 50 minutos, llegando a Forrest Island.

(a) Encuentre la distancia entre el puerto base del pescador y Forrest Island.

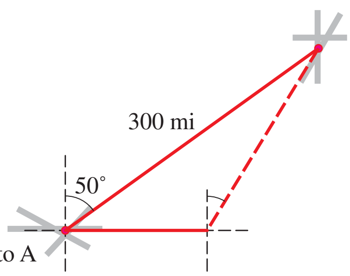
(b) Encuentre el rumbo de Forrest Island de regreso a su puerto base.



46. Navegación El aeropuerto B está a 300 millas del aeropuerto A a un rumbo N 50° E (vea la figura). Un piloto que desea volar de A a B erróneamente vuela en dirección al este a 200 mi/h durante 30 minutos, cuando se da cuenta de su error.

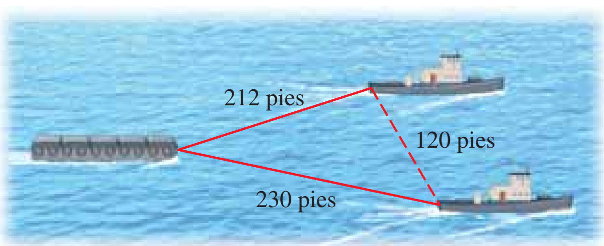
(a) ¿A qué distancia está el piloto de su destino en el momento en que se percata del error?

(b) ¿Qué rumbo debe tomar su avión para llegar al aeropuerto B?

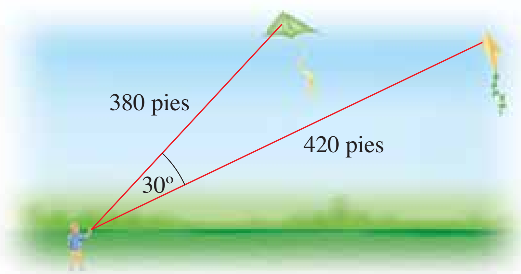


47. Campo triangular Un campo triangular tiene lados de longitudes 22, 36 y 44 yardas. Encuentre el ángulo más grande.

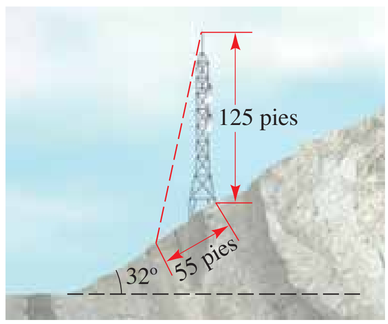
48. Remolque de una barcaza Dos remolcadores que están a 120 pies uno del otro tiran de una barcaza, como se muestra. Si la longitud de un cable es 212 pies y la longitud del otro es 230 pies, encuentre el ángulo formado por los dos cables.



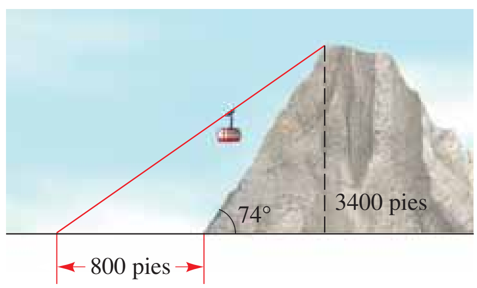
49. Cometas en vuelo Un niño está haciendo volar dos cometas al mismo tiempo; tiene 380 pies de cuerda a una de las cometas y 420 pies para la otra. Él estima que el ángulo entre las dos cuerdas es de 30°. Aproxime la distancia entre las cometas.



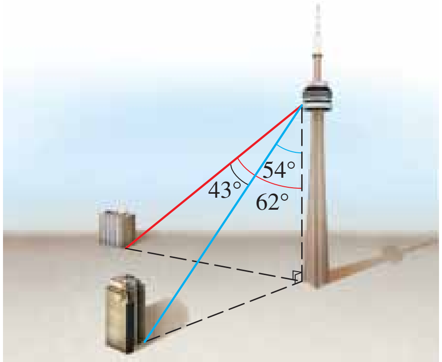
50. Asegurar una torre Una torre de 125 pies está situada en la ladera de una montaña que está inclinada 32° con la horizontal. Un cable de retenida se ha de sujetar a la parte superior de la torre y anclarse en un punto a 55 pies debajo de la base de la torre. Encuentre la longitud más corta del alambre necesario.



51. Teleférico Una empinada montaña está inclinada 74° con la horizontal y se eleva a 3400 pies sobre la llanura circundante. Un funicular se ha de instalar desde un punto a 800 pies de la base hasta lo alto de la montaña, como se muestra. Encuentre la longitud más corta del cable necesario.



52. Torre CN La Torre CN en Toronto, Canadá, es la estructura libre más alta de Norteamérica. Una mujer que está en la plataforma de observación, a 1150 pies sobre el suelo, desea determinar la distancia entre dos puntos de referencia que están al nivel del suelo. Ella observa que el ángulo formado por las líneas de vista a estos dos puntos de referencia es de 43°; también observa que el ángulo entre la vertical y la línea de vista a uno de los puntos de referencia es de 62° y el del otro punto de referencia es de 54°. Encuentre la distancia entre los dos puntos de referencia.



53. Valor de un terreno Un terreno en el centro de Columbia está valuado en \$20 el pie cuadrado. ¿Cuál es el valor de un lote triangular con lados de longitudes 112, 148 y 190 pies?

DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

54. Despejar los ángulos de un triángulo El párrafo que sigue la solución del ejemplo 3 de la página 477 explica un método alternativo para hallar $\angle B$ y $\angle C$, usando la Ley de Senos. Use este método para resolver el triángulo del ejemplo, hallando $\angle B$ primero y $\angle C$ después. Explique cómo escoger el valor apropiado para la medición de $\angle B$. ¿Cuál método prefiere usted para resolver un problema de triángulo LAL, el explicado en el Ejemplo 3 o el que usó en este ejercicio?

CAPÍTULO 6 | REPASO

■ VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

1. **(a)** Explique la diferencia entre un ángulo positivo y un ángulo negativo.
   (b) ¿Cómo se forma un ángulo de 1 grado de medida?
   (c) ¿Cómo se forma un ángulo de 1 radián de medida?
   (d) ¿Cómo se define la medida en radianes de un ángulo θ?
   (e) ¿Cómo se convierte de grados a radianes?
   (f) ¿Cómo se convierte de radianes a grados?
2. **(a)** ¿Cuándo está un ángulo en posición inicial?
   (b) ¿Cuándo son coterminales dos ángulos?
3. **(a)** ¿Cuál es la longitud s de un arco de círculo con radio r que subtiende un ángulo central de θ radianes?
   (b) ¿Cuál es el área A de un sector de círculo con radio r y ángulo central de θ radianes?
4. Si θ es un ángulo agudo en un triángulo rectángulo, defina las seis relaciones trigonométricas en términos de los lados adyacentes y opuestos a θ y la hipotenusa.
5. ¿Qué significa resolver un triángulo?
6. Si θ es un ángulo en posición normal, $P(x, y)$ es un punto en el lado terminal y r es la distancia del origen a P, escriba expresiones para las seis funciones trigonométricas de θ.
7. ¿Cuáles funciones trigonométricas son positivas en los cuadrantes primero, segundo, tercero y cuarto?
8. Si θ es un ángulo en posición normal, ¿cuál es el ángulo de referencia $\bar{\theta}$?
9. **(a)** Exprese las identidades recíprocas.
   (b) Exprese las identidades de Pitágoras.
10. **(a)** ¿Cuál es el área de un triángulo con lados de longitud a y b y con ángulo entre ellos θ?
    (b) ¿Cuál es el área de un triángulo con lados de longitud a, b y c?
11. Defina la función seno inversa $\operatorname{sen}^{-1} x$. ¿Cuáles son su dominio y rango?
12. Defina la función coseno inversa $\cos^{-1} x$. ¿Cuáles son su dominio y rango?
13. Defina la función tangente inversa $\tan^{-1} x$. ¿Cuáles son su dominio y rango?
14. **(a)** Exprese la Ley de Senos.
    (b) Exprese la Ley de Cosenos.
15. Explique el caso ambiguo de la Ley de Senos.

■ EJERCICIOS

1-2 ■ Encuentre la medida en radianes que corresponda a la medida dada en grados.

1. **(a)** $60°$ **(b)** $330°$ **(c)** $-135°$ **(d)** $-90°$

2. **(a)** $24°$ **(b)** $-330°$ **(c)** $750°$ **(d)** $5°$

3-4 ■ Encuentre la medida en grados que corresponda a la medida dada en radianes.

3. **(a)** $\frac{5\pi}{2}$ **(b)** $-\frac{\pi}{6}$ **(c)** $\frac{9\pi}{4}$ **(d)** 3.1

4. **(a)** 8 **(b)** $-\frac{5}{2}$ **(c)** $\frac{11\pi}{6}$ **(d)** $\frac{3\pi}{5}$

5. Encuentre la longitud de un arco de una circunferencia de radio 8 m si el arco subtiende un ángulo central de 1 rad.

6. Encuentre la medida de un ángulo central θ en un círculo de 5 pies de radio si el ángulo está subtendido por un arco de 7 pies de longitud.

7. Un arco circular de 100 pies de longitud subtiende un ángulo central de 70°. Encuentre el radio del círculo.

8. ¿Cuántas revoluciones hará una rueda de 28 pulg. de un auto en media hora si el auto está corriendo a 60 mi/h?