15. $\dfrac{5}{(x-1)(x+4)}$

16. $\dfrac{x+6}{x(x+3)}$

17. $\dfrac{12}{x^2-9}$

18. $\dfrac{x-12}{x^2-4x}$

19. $\dfrac{4}{x^2-4}$

20. $\dfrac{2x+1}{x^2+x-2}$

21. $\dfrac{x+14}{x^2-2x-8}$

22. $\dfrac{8x-3}{2x^2-x}$

23. $\dfrac{x}{8x^2-10x+3}$

24. $\dfrac{7x-3}{x^3+2x^2-3x}$

25. $\dfrac{9x^2-9x+6}{2x^3-x^2-8x+4}$

26. $\dfrac{-3x^2-3x+27}{(x+2)(2x^2+3x-9)}$

27. $\dfrac{x^2+1}{x^3+x^2}$

28. $\dfrac{3x^2+5x-13}{(3x+2)(x^2-4x+4)}$

29. $\dfrac{2x}{4x^2+12x+9}$

30. $\dfrac{x-4}{(2x-5)^2}$

31. $\dfrac{4x^2-x-2}{x^4+2x^3}$

32. $\dfrac{x^3-2x^2-4x+3}{x^4}$

33. $\dfrac{-10x^2+27x-14}{(x-1)^3(x+2)}$

34. $\dfrac{-2x^2+5x-1}{x^4-2x^3+2x-1}$

35. $\dfrac{3x^3+22x^2+53x+41}{(x+2)^2(x+3)^2}$

36. $\dfrac{3x^2+12x-20}{x^4-8x^2+16}$

37. $\dfrac{x-3}{x^3+3x}$

38. $\dfrac{3x^2-2x+8}{x^3-x^2+2x-2}$

39. $\dfrac{2x^3+7x+5}{(x^2+x+2)(x^2+1)}$

40. $\dfrac{x^2+x+1}{2x^4+3x^2+1}$

41. $\dfrac{x^4+x^3+x^2-x+1}{x(x^2+1)^2}$

42. $\dfrac{2x^2-x+8}{(x^2+4)^2}$

43. $\dfrac{x^5-2x^4+x^3+x+5}{x^3-2x^2+x-2}$

44. $\dfrac{x^5-3x^4+3x^3-4x^2+4x+12}{(x-2)^2(x^2+2)}$

45. Determine A y B en términos de a y b.

$$\frac{ax+b}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$$

46. Determine A, B, C y D en términos de a y b.

$$\frac{ax^3+bx^2}{(x^2+1)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

47. Reconocimiento de descomposiciones en fracciones parciales Para cada expresión, determine si ya es una descomposición en fracciones parciales o si puede descomponerse más.

(a) $\dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{1}{x+1}$ **(b)** $\dfrac{x}{(x+1)^2}$

(c) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{(x+1)^2}$ **(d)** $\dfrac{x+2}{(x^2+1)^2}$

48. Ensamble y desensamble de fracciones parciales La siguiente expresión es una descomposición en fracciones parciales

$$\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x+1}$$

Use un común denominador para combinar los términos en una fracción. A continuación, use las técnicas de esta sección para hallar su descomposición en fracciones parciales. ¿Obtuvo usted de nuevo la expresión original?

10.8 SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES

Métodos de sustitución y eliminación ▶ Método gráfico

En esta sección resolvemos sistemas de ecuaciones en las que las ecuaciones no son todas lineales. Los métodos que aprendimos en la Sección 10.1 también se pueden usar para resolver sistemas no lineales.

▼ Métodos de sustitución y eliminación

Para resolver un sistema de ecuaciones no lineales, podemos usar el método de sustitución o eliminación, como se ilustra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 1 | Método de sustitución

Encuentre todas las soluciones del sistema.

$$\begin{cases} x^2+y^2=100 & \text{Ecuación 1}\\ 3x-y=10 & \text{Ecuación 2}\end{cases}$$

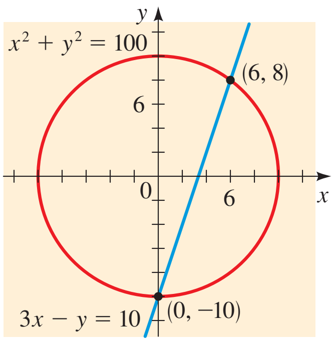


FIGURA 1

VERIFIQUE SUS RESPUESTAS

$x = 0, y = -10$:

$$\begin{cases} (0)^2 + (-10)^2 = 100 \\ 3(0) - (-10) = 10 \end{cases} \checkmark$$

$x = 6, y = 8$:

$$\begin{cases} (6)^2 + (8)^2 = 36 + 64 = 100 \\ 3(6) - (8) = 18 - 8 = 10 \end{cases} \checkmark$$

SOLUCIÓN Despeje una variable. Empezamos por despejar y de la segunda ecuación:

$$y = 3x - 10 \qquad \text{Despejamos } y \text{ de la Ecuación 2}$$

Sustituya. A continuación sustituimos y en la primera ecuación y despejamos x:

$$\begin{aligned} x^2 + (3x - 10)^2 &= 100 && \text{Sustituya } y = 3x - 10 \text{ en la Ecuación 1} \\ x^2 + (9x^2 - 60x + 100) &= 100 && \text{Expanda} \\ 10x^2 - 60x &= 0 && \text{Simplifique} \\ 10x(x - 6) &= 0 && \text{Factorice} \\ x = 0 \quad \text{o} \quad x &= 6 && \text{Despeje } x \end{aligned}$$

Sustituya. Ahora sustituimos de nuevo estos valores de x en la ecuación $y = 3x - 10$:

$$\begin{aligned} &\text{Para} \quad x = 0: \quad y = 3(0) - 10 = -10 && \text{Sustitución hacia atrás} \\ &\text{Para} \quad x = 6: \quad y = 3(6) - 10 = 8 && \text{Sustitución hacia atrás} \end{aligned}$$

Entonces tenemos dos soluciones: $(0, -10)$ y $(6, 8)$.

La gráfica de la primera ecuación es una circunferencia, y la gráfica de la segunda ecuación es una recta; la Figura 1 muestra que las gráficas se cruzan en los dos puntos $(0, -10)$ y $(6, 8)$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **5**

EJEMPLO 2 | Método de eliminación

Encuentre todas las soluciones del sistema.

$$\begin{cases} 3x^2 + 2y = 26 & \text{Ecuación 1} \\ 5x^2 + 7y = 3 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

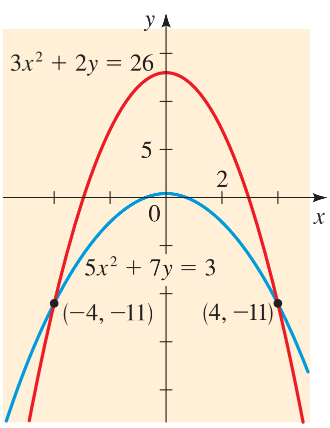


FIGURA 2

VERIFIQUE SUS RESPUESTAS

$x = -4, y = -11$:

$$\begin{cases} 3(-4)^2 + 2(-11) = 26 \\ 5(-4)^2 + 7(-11) = 3 \end{cases} \checkmark$$

$x = 4, y = -11$:

$$\begin{cases} 3(4)^2 + 2(-11) = 26 \\ 5(4)^2 + 7(-11) = 3 \end{cases} \checkmark$$

SOLUCIÓN Escogemos eliminar el término en x, de modo que multiplicamos la primera ecuación por 5 y la segunda ecuación por -3. A continuación sumamos las dos ecuaciones y despejamos y.

$$\begin{aligned} \begin{cases} 15x^2 + 10y = 130 \\ -15x^2 - 21y = -9 \end{cases} & \qquad \begin{aligned} &5 \times \text{Ecuación 1} \\ &(-3) \times \text{Ecuación 2} \end{aligned} \\ -11y = 121 & \qquad \text{Sumamos} \\ y = -11 & \qquad \text{Despejamos } y \end{aligned}$$

Ahora sustituimos $y = -11$ en una de las ecuaciones originales, por ejemplo $3x^2 + 2y = 26$ y despejamos x.

$$\begin{aligned} 3x^2 + 2(-11) &= 26 && \text{Sustituya } y = -11 \text{ en la Ecuación 1} \\ 3x^2 &= 48 && \text{Sumamos 22} \\ x^2 &= 16 && \text{Dividamos entre 3} \\ x = -4 \quad \text{o} \quad x &= 4 && \text{Despejamos } x \end{aligned}$$

Entonces tenemos dos soluciones: $(-4, -11)$ y $(4, -11)$.

Las gráficas de ambas ecuaciones son parábolas (vea Sección 3.1). La Figura 2 muestra que las gráficas se cruzan en los dos puntos $(-4, -11)$ y $(4, -11)$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **11**

▼ Método gráfico

El método gráfico es particularmente útil para resolver sistemas de ecuaciones no lineales.

EJEMPLO 3 | Método gráfico

Encuentre todas las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x^2 - y = 2 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Grafique cada ecuación. Despejando y en términos de x, obtenemos el sistema equivalente

$$\begin{cases} y = x^2 - 2 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$$

Encuentre puntos de intersección. La Figura 3 muestra que las gráficas de estas ecuaciones se cruzan en dos puntos. Si hacemos acercamiento, vemos que las soluciones son

$$(-1, -1) \quad \text{y} \quad (3, 7)$$

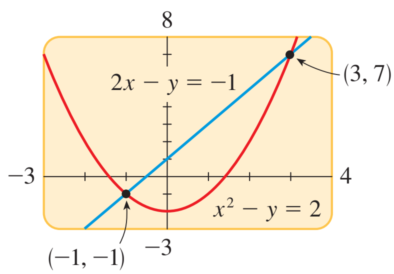


FIGURA 3

VERIFIQUE SUS RESPUESTAS

$x = -1, y = -1$:

$$\begin{cases} (-1)^2 - (-1) = 2 \\ 2(-1) - (-1) = -1 \end{cases} \quad ✔$$

$x = 3, y = 7$:

$$\begin{cases} 3^2 - 7 = 2 \\ 2(3) - 7 = -1 \end{cases} \quad ✔$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **33**

LAS MATEMÁTICAS EN EL MUNDO MODERNO

Sistema de Posicionamiento Global (GPS)

Cortesía de NASA

En un día frío y con niebla en 1707 una flota naval inglesa navegaba hacia su puerto de base a paso rápido. Los navegantes de la flota no lo sabían, pero estaban a sólo unas pocas yardas de las rocosas costas de Inglaterra; en el consiguiente desastre la flota quedó totalmente destruida, tragedia que pudo haberse evitado si sus navegantes hubieran conocido sus posiciones. En aquellos días, la latitud se determinaba por la posición de la Estrella Polar (y esto podía hacerse sólo de noche y con buen clima), y la longitud por la posición del Sol con respecto a donde estaría en Inglaterra *a la misma hora*. En consecuencia, la navegación requería de un método preciso de conocer la hora en sus barcos. (La invención de relojes accionados por un resorte produjo la solución final.)

Desde entonces, se han perfeccionado varios métodos diferentes para determinar la posición y todos se apoyan fuertemente en las matemáticas (vea LORAN, página 747). El método más reciente, llamado Sistema de Posicionamiento Global (GPS), utiliza triangulación. En este sistema, 24 satélites están estratégicamente ubicados sobre la superficie terrestre. Un aparato portátil de GPS mide la distancia desde un satélite, usando el tiempo de transmisión de señales de radio emitidas desde el satélite. El conocimiento de las distancias a tres satélites diferentes nos indica que estamos en el punto de intersección de tres esferas diferentes. Esto determina de manera única nuestra posición (vea Ejercicio 47, página 703).

EJEMPLO 4 | Resolver gráficamente un sistema de ecuaciones

Encuentre todas las soluciones del sistema, correctas a un lugar decimal.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 12 & \text{Ecuación 1} \\ y = 2x^2 - 5x & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

SOLUCIÓN La gráfica de la primera ecuación es una circunferencia, y la gráfica de la segunda es una parábola. Para graficar la circunferencia en una calculadora graficadora primero debemos despejar y en términos de x (vea Sección 1.9).

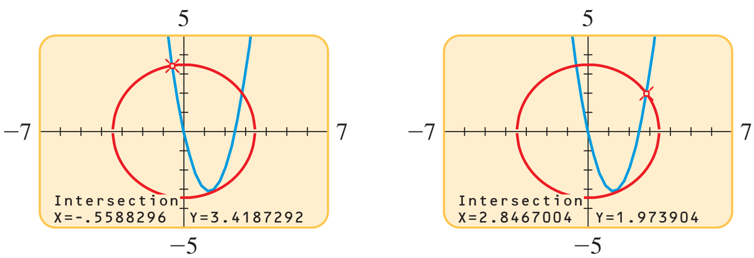
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 12 \\ y^2 &= 12 - x^2 && \text{Aísle } y^2 \text{ en el lado izquierdo} \\ y &= \pm\sqrt{12 - x^2} && \text{Tome raíces cuadradas} \end{aligned}$$

Para graficar la circunferencia, debemos graficar ambas funciones.

$$y = \sqrt{12 - x^2} \qquad \text{y} \qquad y = -\sqrt{12 - x^2}$$

En la Figura 4 la gráfica de la circunferencia se muestra en rojo, y la parábola se ve en azul. Las gráficas se cruzan en los cuadrantes primero y segundo. Con un acercamiento, o usando el comando `Intersect`, vemos que los puntos de intersección son $(-0.599, 3.419)$ y $(2.847, 1.974)$. También parece haber un punto de intersección en el cuarto cuadrante, pero, cuando hacemos acercamiento, vemos que las curvas se acercan entre sí pero no se cruzan (vea Figura 5). Entonces el sistema tiene dos soluciones; redondeadas al décimo más cercano, son

$$(-0.6, 3.4) \qquad \text{y} \qquad (2.8, 2.0)$$



(a) (b)

FIGURA 4 $x^2 + y^2 = 12,\ y = 2x^2 - 5x$

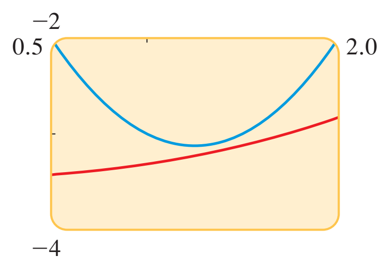


FIGURA 5 Acercamiento

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **37**

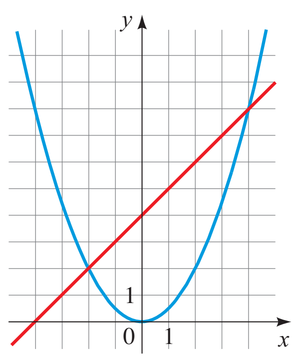
10.8 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1-2 ■ El sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2y - x^2 = 0 \\ y - x = 4 \end{cases}$$

está graficado a la derecha.



1. Use la gráfica para hallar la(s) solución(es) del sistema.

2. Verifique que las soluciones que encontró en el Ejercicio 1 satisfagan el sistema.

HABILIDADES

3-8 ■ Use el método de sustitución para hallar todas las soluciones del sistema de ecuaciones.

3. $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 12 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = 2x \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ x + y = 0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2 + y = 9 \\ x - y + 3 = 0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x + y^2 = 0 \\ 2x + 5y^2 = 75 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^2 - y = 1 \\ 2x^2 + 3y = 17 \end{cases}$

9-14 ■ Use el método de eliminación para hallar todas las soluciones del sistema de ecuaciones.

9. $\begin{cases} x^2 - 2y = 1 \\ x^2 + 5y = 29 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x^2 + 4y = 17 \\ 2x^2 + 5y = 2 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 3x^2 - y^2 = 11 \\ x^2 + 4y^2 = 8 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x^2 + 4y = 13 \\ x^2 - y^2 = \frac{7}{2} \end{cases}$

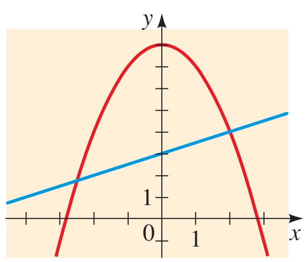
13. $\begin{cases} x - y^2 + 3 = 0 \\ 2x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}$

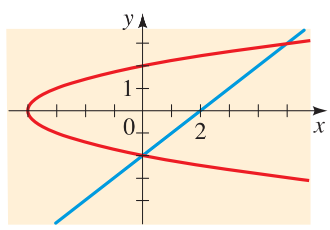
14. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2x^2 - y^2 = x + 3 \end{cases}$

15-18 ■ Nos dan dos ecuaciones y sus gráficas. Encuentre el (los) punto(s) de intersección de las gráficas al resolver el sistema.

15. $\begin{cases} x^2 + y = 8 \\ x - 2y = -6 \end{cases}$

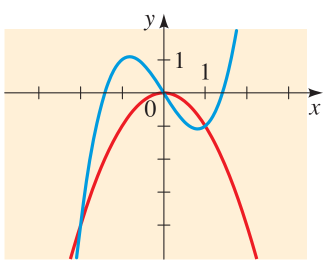
16. $\begin{cases} x - y^2 = -4 \\ x - y = 2 \end{cases}$

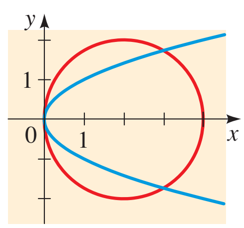




17. $\begin{cases} x^2 + y = 0 \\ x^3 - 2x - y = 0 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4x \\ x = y^2 \end{cases}$





19-32 ■ Encuentre todas las soluciones del sistema de ecuaciones.

19. $\begin{cases} y + x^2 = 4x \\ y + 4x = 16 \end{cases}$

20. $\begin{cases} x - y^2 = 0 \\ y - x^2 = 0 \end{cases}$

21. $\begin{cases} x - 2y = 2 \\ y^2 - x^2 = 2x + 4 \end{cases}$

22. $\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = x^2 - 4 \end{cases}$

23. $\begin{cases} x - y = 4 \\ xy = 12 \end{cases}$

24. $\begin{cases} xy = 24 \\ 2x^2 - y^2 + 4 = 0 \end{cases}$

25. $\begin{cases} x^2y = 16 \\ x^2 + 4y + 16 = 0 \end{cases}$

26. $\begin{cases} x + \sqrt{y} = 0 \\ y^2 - 4x^2 = 12 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$

28. $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 2 \\ 2x^2 - 3y = 15 \end{cases}$

29. $\begin{cases} 2x^2 - 8y^3 = 19 \\ 4x^2 + 16y^3 = 34 \end{cases}$

30. $\begin{cases} x^4 + y^3 = 17 \\ 3x^4 + 5y^3 = 53 \end{cases}$

31. $\begin{cases} \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{y} = 1 \\ -\dfrac{4}{x} + \dfrac{7}{y} = 1 \end{cases}$

32. $\begin{cases} \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{6}{y^4} = \dfrac{7}{2} \\ \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{y^4} = 0 \end{cases}$

33-40 ■ Use el método gráfico para hallar todas las soluciones del sistema de ecuaciones, redondeadas a dos lugares decimales.

33. $\begin{cases} y = x^2 + 8x \\ y = 2x + 16 \end{cases}$

34. $\begin{cases} y = x^2 - 4x \\ 2x - y = 2 \end{cases}$

35. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$

36. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ x^2 - 2x + y^2 = 13 \end{cases}$

37. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{18} = 1 \\ y = -x^2 + 6x - 2 \end{cases}$

38. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ y = x^2 - 2x - 8 \end{cases}$

39. $\begin{cases} x^4 + 16y^4 = 32 \\ x^2 + 2x + y = 0 \end{cases}$

40. $\begin{cases} y = e^x + e^{-x} \\ y = 5 - x^2 \end{cases}$

APLICACIONES

41. Lados de un rectángulo Un rectángulo tiene un área de 180 cm^2 y un perímetro de 54 cm. ¿Cuáles son las longitudes de sus lados?

42. Catetos de un triángulo rectángulo Un triángulo rectángulo tiene un área de 84 $pies^2$ y una hipotenusa de 25 pies de largo. ¿Cuáles son las longitudes de sus otros dos lados?

43. Lados de un rectángulo El perímetro de un rectángulo es 70, y su diagonal es 25. Encuentre su longitud y ancho.

44. Lados de un rectángulo Una hoja metálica circular tiene un diámetro de 20 pulgadas. Los lados han de cortarse para formar un rectángulo de 160 $pulg.^2$ de área (vea figura). ¿Cuáles son las longitudes de los lados del rectángulo?