2.1 ¿QUÉ ES UNA FUNCIÓN?

Funciones a nuestro alrededor ▶ Definición de función ▶ Evaluación de una función ▶ Dominio de una función ▶ Cuatro formas de representar una función

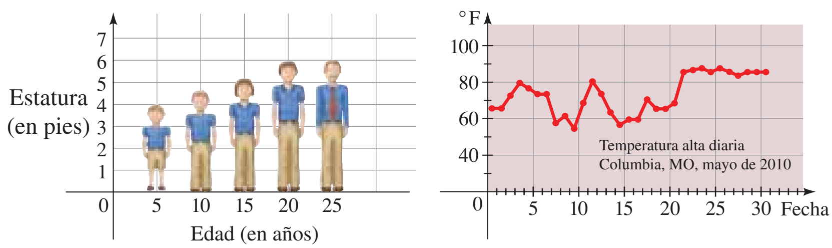
En esta sección exploramos la idea de una función y a continuación damos la definición de función.

▼ Funciones a nuestro alrededor

En casi todos los fenómenos físicos observamos que una cantidad depende de otra. Por ejemplo, la estatura de una persona depende de su edad, la temperatura depende de la fecha, el costo de enviar un paquete por correo depende de su peso (vea Figura 1). Usamos el término *función* para describir esta dependencia de una cantidad con respecto a otra. Esto es, decimos lo siguiente:

- La estatura es una función de la edad.
- La temperatura es una función de la fecha.
- El costo de enviar un paquete por correo depende de su peso.

La Oficina de Correos de Estados Unidos utiliza una sencilla regla para determinar el costo de enviar por correo un paquete de primera clase con base en el peso del paquete. Pero no es tan fácil describir la regla que relaciona la estatura con la edad o la regla que relaciona temperatura y fecha.



w (onzas)	Porte (dólares)
$0 < w \leq 1$	1.22
$1 < w \leq 2$	1.39
$2 < w \leq 3$	1.56
$3 < w \leq 4$	1.73
$4 < w \leq 5$	1.90
$5 < w \leq 6$	2.07

FIGURA 1 La estatura es función de la edad. La temperatura es función de la fecha. El porte es función del peso.

¿Puede usted considerar otras funciones? Veamos a continuación algunos ejemplos:

- El área de un círculo es una función de su radio.
- El número de bacterias en un cultivo es función del tiempo.
- El peso de una astronauta es una función de su elevación.
- El precio de una mercancía es una función de la demanda de esa mercancía.

La regla que describe la forma en que el área A de un círculo depende de su radio r está dada por la fórmula $A = \pi r^2$. Aun cuando no exista una regla o fórmula precisa que describa una función, todavía podemos describir la función por medio de una gráfica. Por ejemplo, cuando abrimos la llave del agua caliente de una llave, la temperatura del agua depende de cuánto tiempo haya estado saliendo el agua. Por tanto, podemos decir:

- La temperatura del agua de la llave es una función del tiempo.

La Figura 2 muestra una gráfica aproximada de la temperatura T del agua como función del tiempo t que haya transcurrido desde que se abrió la llave. La gráfica muestra que la temperatura inicial del agua es cercana a la temperatura ambiente. Cuando el agua del tanque de agua caliente llega a la llave, la temperatura T del agua aumenta rápidamente. En la siguiente fase, T es constante a la temperatura del agua del tanque. Cuando éste se descarga, T disminuye a la temperatura del agua fría de alimentación.

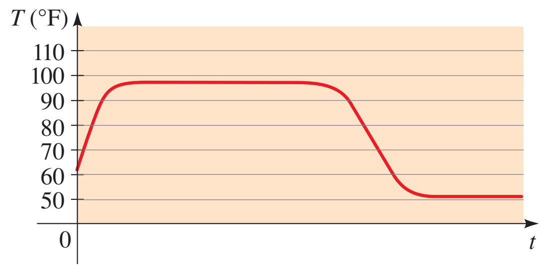


FIGURA 2 Gráfica de la temperatura T del agua como función del tiempo t

Definición de función

Ya antes hemos empleado letras para representar números. Aquí hacemos algo muy distinto: usamos letras para representar *reglas*.

Una función es una regla. Para hablar de una función, es necesario darle un nombre. Usaremos letras como $f, g, h, \ldots$ para representar funciones. Por ejemplo, podemos usar la letra f para representar una regla como sigue:

"f" es la regla "elevar al cuadrado el número"

Cuando escribimos $f(2)$ queremos decir "aplicar la regla f al número 2". La aplicación de la regla da $f(2) = 2^2 = 4$. Del mismo modo, $f(3) = 3^2 = 9$, $f(4) = 4^2 = 16$, y en general $f(x) = x^2$.

DEFINICIÓN DE UNA FUNCIÓN

Una **función** f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto A exactamente un elemento, llamado $f(x)$, de un conjunto B.

Por lo general consideramos funciones para las cuales los conjuntos A y B son conjuntos de números reales. El símbolo $f(x)$ se lee "f de x" o "f en x" y se denomina **valor de f en x**, o la **imagen de x bajo f**. El conjunto A recibe el nombre de **dominio** de la función. El **rango** de f es el conjunto de todos los valores posibles de $f(x)$ cuando x varía en todo el dominio, es decir,

$$\text{Rango de } f = \{f(x) \mid x \in A\}$$

El símbolo que representa un número arbitrario del dominio de una función f se llama **variable independiente**. El símbolo que representa un número en el rango de f se llama **variable dependiente**. Por tanto, si escribimos $y = f(x)$, entonces x es la variable independiente y y es la variable dependiente.

Es útil considerar una función como una **máquina** (vea Figura 3). Si x está en el dominio de la función f, entonces cuando x entra a la máquina, es aceptada como **entrada** y la máquina produce una **salida** $f(x)$ de acuerdo con la regla de la función. Así, podemos considerar el dominio como el conjunto de todas las posibles entradas y el rango como el conjunto de todas las posibles salidas.

La tecla $\boxed{\sqrt{\ }}$ de una calculadora es un buen ejemplo de una función como máquina. Primero se ingresa x en la pantalla y, a continuación, se pulsa la tecla marcada como $\boxed{\sqrt{\ }}$. (En casi todas las calculadoras *graficadoras* se invierte el orden de estas operaciones.) Si $x < 0$, entonces x no está en el dominio de esta función; esto es, x no es una entrada aceptable, y la calculadora indicará un error. Si $x \geq 0$, entonces aparece una aproximación a $\sqrt{x}$ en la pantalla, correcta a cierto número de lugares decimales. (Entonces, la tecla $\boxed{\sqrt{\ }}$ de la calculadora no es exactamente la misma que la función matemática exacta f definida por $f(x) = \sqrt{x}$.)

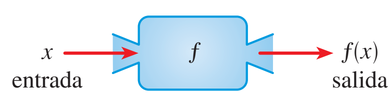


FIGURA 3 Diagrama de máquina de f

Otra forma de representar una función es por medio de un **diagrama de flecha** como en la Figura 4. Cada flecha conecta un elemento de A con un elemento de B. La flecha indica que $f(x)$ está asociada con x, $f(a)$ está asociada con a, y así sucesivamente.

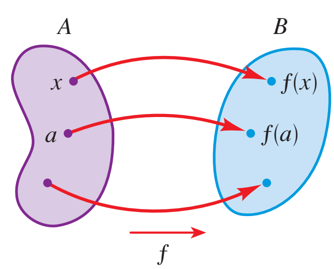


FIGURA 4 Diagrama de flecha de f

EJEMPLO 1 | Análisis de una función

Una función f está definida por la fórmula

$$f(x) = x^2 + 4$$

(a) Exprese verbalmente cómo actúa f sobre la entrada x para producir la salida $f(x)$.

(b) Evalúe $f(3)$, $f(-2)$ y $f(\sqrt{5})$.

(c) Encuentre el dominio y rango de f.

(d) Trace un diagrama de máquina para f.

SOLUCIÓN

(a) La fórmula nos dice que f primero eleva al cuadrado la entrada x y luego suma 4 al resultado. Por tanto, f es la función

"elevar al cuadrado, luego sumar 4"

(b) Los valores de f se encuentran al sustituir por x en la fórmula $f(x) = x^2 + 4$.

$$f(3) = 3^2 + 4 = 13 \qquad \text{Sustituir } x \text{ por } 3$$

$$f(-2) = (-2)^2 + 4 = 8 \qquad \text{Sustituir } x \text{ por } -2$$

$$f(\sqrt{5}) = (\sqrt{5})^2 + 4 = 9 \qquad \text{Sustituir } x \text{ por } \sqrt{5}$$

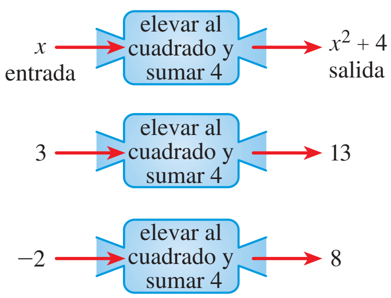


FIGURA 5 Diagrama de máquina

(c) El dominio de f está formado por todas las posibles entradas para x. Como podemos evaluar la fórmula $f(x) = x^2 + 4$ para cada número real x, el dominio de f es el conjunto $\mathbb{R}$ de todos los números reales.

El rango de f está formado por todas las posibles salidas de f. Como $x^2 \geq 0$ para todos los números reales x, tenemos $x^2 + 4 \geq 4$, de modo que por cada salida de f tenemos $f(x) \geq 4$. Entonces, el rango de f es $\{y \mid y \geq 4\} = [4, \infty)$.

(d) Un diagrama de máquina para f se ilustra en la Figura 5.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **9, 13, 17** Y **43**

Evaluación de una función

En la definición de una función, la variable independiente x desempeña el papel de un símbolo o dígito. Por ejemplo, la función $f(x) = 3x^2 + x - 5$ se puede considerar como

$$f(\square) = 3 \cdot \square^2 + \square - 5$$

Para evaluar f en un número, sustituimos el número por el símbolo o dígito.

EJEMPLO 2 | Evaluación de una función

Sea $f(x) = 3x^2 + x - 5$. Evalúe cada valor de la función.

(a) $f(-2)$ **(b)** $f(0)$ **(c)** $f(4)$ **(d)** $f(\frac{1}{2})$

SOLUCIÓN Para evaluar f en un número, sustituimos el número por x en la definición de f.

(a) $f(-2) = 3 \cdot (-2)^2 + (-2) - 5 = 5$

(b) $f(0) = 3 \cdot 0^2 + 0 - 5 = -5$

(c) $f(4) = 3 \cdot (4)^2 + 4 - 5 = 47$

(d) $f(\frac{1}{2}) = 3 \cdot (\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} - 5 = -\frac{15}{4}$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **19**

EJEMPLO 3 | Una función definida por tramos

Un plan de teléfono celular cuesta \$39 al mes. El plan incluye 400 minutos gratis y cobra \$0.20 por cada minuto adicional de uso. Los cargos mensuales son una función del número de minutos usados, dada por

$$C(x) = \begin{cases} 39 & \text{si } 0 \le x \le 400 \\ 39 + 0.20(x - 400) & \text{si } x > 400 \end{cases}$$

Encuentre $C(100)$, $C(400)$ y $C(480)$.

SOLUCIÓN Recuerde que una función es una regla. He aquí cómo aplicamos la regla para esta función. Primero vemos el valor de la entrada x. Si $0 \le x \le 400$, entonces el valor de $C(x)$ es 39. Por otra parte, si $x > 400$, entonces el valor de $C(x)$ es $39 + 0.20((x - 400)$.

Una **función definida** por tramos está definida por diferentes fórmulas en diferentes partes de su dominio. La función C del Ejemplo 3 está definida por tramos.

Como $100 \le 400$, tenemos $C(100) = 39$.

Como $400 \le 400$, tenemos $C(400) = 39$.

Como $480 > 400$, tenemos $C(480) = 39 + 0.20(480 - 400) = 55$.

Por tanto, el plan cobra \$39 por 100 minutos, \$39 por 400 minutos y \$55 por 480 minutos.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **27**

EJEMPLO 4 | Evaluación de una función

Si $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$, evalúe lo siguiente.

(a) $f(a)$ **(b)** $f(-a)$

(c) $f(a + h)$ **(d)** $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad h \neq 0$

Expresiones como la del inciso (d) del ejemplo 4 aparecen con frecuencia en cálculo y se les llama *cociente de diferencias* y representan el cambio promedio en el valor de f entre $x = a$ y $x = a + h$.

SOLUCIÓN

(a) $f(a) = 2a^2 + 3a - 1$

(b) $f(-a) = 2(-a)^2 + 3(-a) - 1 = 2a^2 - 3a - 1$

(c)
$$\begin{aligned} f(a + h) &= 2(a + h)^2 + 3(a + h) - 1 \\ &= 2(a^2 + 2ah + h^2) + 3(a + h) - 1 \\ &= 2a^2 + 4ah + 2h^2 + 3a + 3h - 1 \end{aligned}$$

(d) Usando los resultados de las partes (c) y (a), tenemos

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{(2a^2 + 4ah + 2h^2 + 3a + 3h - 1) - (2a^2 + 3a - 1)}{h} \\ &= \frac{4ah + 2h^2 + 3h}{h} = 4a + 2h + 3 \end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **35**

EJEMPLO 5 | El peso de una astronauta

Si una astronauta pesa 130 libras en la superficie de la Tierra, entonces su peso cuando esté a h millas sobre la Tierra está dado por la función

$$w(h) = 130\left(\frac{3960}{3960 + h}\right)^2$$

(a) ¿Cuál es su peso cuando ella esté a 100 millas sobre la Tierra?

El peso de un cuerpo que esté sobre la Tierra, o muy cerca de ésta, es la fuerza gravitacional que la Tierra ejerce sobre ese cuerpo. Cuando se encuentre en órbita alrededor de la Tierra, una astronauta experimenta la sensación de "ingravidez" porque la fuerza centrípeta que la mantiene en órbita es exactamente igual que la atracción gravitacional de la Tierra.

(b) Construya una tabla de valores para la función w que da el peso de la astronauta a altitudes de 0 a 500 millas. ¿Qué se concluye a partir de la tabla?

SOLUCIÓN

(a) Buscamos el valor de la función w cuando $h = 100$; esto es, debemos calcular $w(100)$.

$$w(100) = 130\left(\frac{3960}{3960 + 100}\right)^2 \approx 123.67$$

Entonces, a una altitud de 100 millas, ella pesa unas 124 lb.

(b) La tabla da el peso de la astronauta, redondeado a la libra más cercana, en incrementos de 100 millas. Los valores de la tabla están calculados como en la parte (a).

h	$w(h)$
0	130
100	124
200	118
300	112
400	107
500	102

La tabla indica que cuanto más alto se encuentre ella, menor es su peso.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **71**

Dominio de una función

Recuerde que el *dominio* de una función es el conjunto de todas las entradas para la función. El dominio de una función puede indicarse explícitamente. Por ejemplo, si escribimos

$$f(x) = x^2 \qquad 0 \le x \le 5$$

entonces el dominio es el conjunto de todos los números reales x para los cuales $0 \le x \le 5$. Si la función está dada por una expresión algebraica y el dominio no se indica explícitamente, entonces por convención *el dominio de la función es el dominio de la expresión algebraica, es decir, el conjunto de todos los números reales para los cuales la expresión está definida como un número real.* Por ejemplo, considere las funciones

Los dominios de expresiones algebraicas se estudian en la página 35.

$$f(x) = \frac{1}{x - 4} \qquad g(x) = \sqrt{x}$$

La función f no está definida en $x = 4$, de modo que su dominio es $\{x \mid x \neq 4\}$. La función g no está definida para x negativa, de modo que su dominio es $\{x \mid x \ge 0\}$.

EJEMPLO 6 | Hallar dominios de funciones

Encuentre el dominio de cada una de las funciones siguientes.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$ **(b)** $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$ **(c)** $h(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t + 1}}$

SOLUCIÓN

(a) Una expresión racional no está definida cuando el denominador es 0. Como

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x(x - 1)}$$

vemos que $f(x)$ no está definida cuando $x = 0$ o $x = 1$. Entonces, el dominio de f es

$$\{x \mid x \neq 0, x \neq 1\}$$

El dominio también se puede escribir en notación de intervalos como

$$(\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$$

(b) No podemos tomar la raíz cuadrada de un número negativo, de modo que debemos tener $9 - x^2 \geq 0$. Usando los métodos de la Sección 1.7, podemos resolver esta desigualdad para hallar que $-3 \leq x \leq 3$. Por lo tanto, el dominio de g es

$$\{x \mid -3 \leq x \leq 3\} = [-3, 3]$$

(c) No podemos tomar la raíz cuadrada de un número negativo, y no podemos dividir entre 0, de modo que debemos tener $t + 1 > 0$, es decir, $t > -1$. Por lo tanto, el dominio de h es

$$\{t \mid t > -1\} = (-1, \infty)$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **47** Y **51**

Cuatro formas de representar una función

Para ayudarnos a entender lo que es una función, hemos empleado diagramas de máquina y de flecha. Podemos describir una función específica en las siguientes cuatro formas:

- verbalmente (por descripción en palabras)
- algebraicamente (por una fórmula explícita)
- visualmente (por una gráfica)
- numéricamente (por una tabla de valores)

Una función individual puede estar representada en las cuatro formas, y con frecuencia es útil pasar de una representación a otra para adquirir más conocimientos sobre la función. No obstante, ciertas funciones se describen en forma más natural por medio de un método que por los otros. Un ejemplo de una descripción verbal es la siguiente regla para convertir entre escalas de temperatura:

"Para hallar el equivalente Fahrenheit de una temperatura Celsius, multiplicar por $\frac{9}{5}$ la temperatura Celsius y luego sumar 32."

En el Ejemplo 7 vemos cómo describir esta regla verbal algebraica, gráfica y numéricamente. Una representación útil del área de un círculo como función de su radio es la fórmula algebraica

$$A(r) = \pi r^2$$

La gráfica producida por un sismógrafo (vea la caja en la página siguiente) es una representación visual de la función de aceleración vertical $a(t)$ del suelo durante un terremoto. Como un ejemplo final, considere la función $C(w)$, que se describe verbalmente como "el costo de enviar por correo una carta de primera clase con peso w". La forma más conveniente de describir esta función es numéricamente, es decir, usando una tabla de valores.

Estaremos usando las cuatro representaciones de funciones en todo este libro; las resumimos en el cuadro siguiente.

CUATRO FORMAS DE REPRESENTAR UNA FUNCIÓN

Verbal

Usando palabras:

"Para convertir de Celsius a Fahrenheit, multiplicar la temperatura Celsius por $\frac{9}{5}$, luego sumar 32."

Relación entre escalas de temperatura Celsius y Fahrenheit.

Algebraica

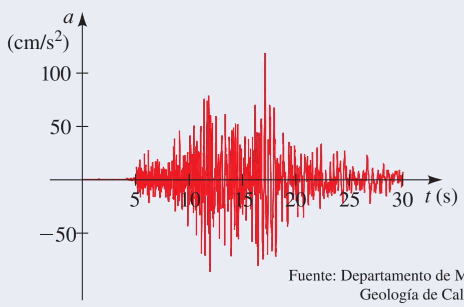
Usando una fórmula:

$$A(r) = \pi r^2$$

Área de un círculo

Visual

Usando una gráfica:



Fuente: Departamento de Minas y Geología de California

Aceleración vertical durante un terremoto

Numérica

Usando una tabla de valores:

w (onzas)	$C(w)$ (dólares)
$0 < w \le 1$	1.22
$1 < w \le 2$	1.39
$2 < w \le 3$	1.56
$3 < w \le 4$	1.73
$4 < w \le 5$	1.90
⋮	⋮

Costo de enviar por correo un paquete de primera clase

EJEMPLO 7 | Representar una función verbal, algebraica, numérica y gráficamente

Sea $F(C)$ la temperatura Fahrenheit correspondiente a la temperatura Celsius C. (Así, F es la función que convierte entradas Celsius en salidas Fahrenheit.) El cuadro citado líneas antes da una descripción verbal de esta función. Encuentre formas de representar esta función

(a) Algebraicamente (usando una fórmula)

(b) Numéricamente (usando una tabla de valores)

(c) Visualmente (usando una gráfica)

SOLUCIÓN

(a) La descripción verbal nos dice que primero debemos multiplicar la entrada C por $\frac{9}{5}$ y luego sumar 32 al resultado.

$$F(C) = \tfrac{9}{5}C + 32$$

(b) Usamos la fórmula algebraica para F que encontramos en la parte (a) para construir una tabla de valores:

C (Celsius)	F (Fahrenheit)
−10	14
0	32
10	50
20	68
30	86
40	104

(c) Usamos los puntos tabulados en la parte (b) para ayudarnos a trazar la gráfica de esta función en la Figura 6.

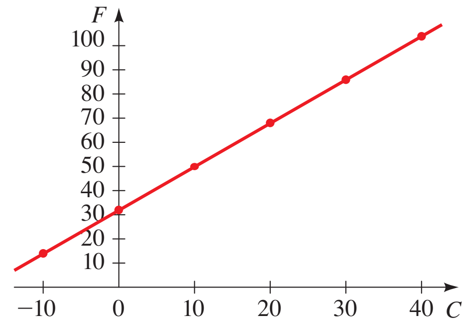


FIGURA 6 Celsius y Fahrenheit

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **65**

2.1 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Si una función f está dada por la fórmula $y = f(x)$, entonces $f(a)$ es la ______de f en $x = a$.

2. Para una función f, el conjunto de todas las posibles entradas se denomina _____de f, y el conjunto de todas las posibles salidas se denomina _______de f.

3. (a) ¿Cuáles de las siguientes funciones tienen 5 en sus dominios?

$$f(x) = x^2 - 3x \qquad g(x) = \frac{x-5}{x} \qquad h(x) = \sqrt{x-10}$$

(b) Para las funciones de la parte (a) que *tienen* 5 en sus dominios, encuentre el valor de la función en 5.

4. Una función está dada algebraicamente por la fórmula $f(x) = (x-4)^2 + 3$. Complete estas otras formas de representar a f:

(a) *Verbal:* "Restar 4, luego _____ y _____.

(b) *Numérica:*

x	$f(x)$
0	19
2	
4	
6	

HABILIDADES

5-8 ■ Exprese la regla en notación de función. (Por ejemplo, la regla "elevar al cuadrado, luego restar 5" se expresa como la función $f(x) = x^2 - 5$.)

5. Sumar 3, luego multiplicar por 2 **6.** Dividir entre 7, luego restar 4

7. Restar 5, luego elevar al cuadrado

8. Tomar la raíz cuadrada, sumar 8, luego multiplicar por $\frac{1}{3}$.

9-12 ■ Exprese la función (o regla) en palabras.

9. $h(x) = x^2 + 2$ **10.** $k(x) = \sqrt{x+2}$

11. $f(x) = \dfrac{x-4}{3}$ **12.** $g(x) = \dfrac{x}{3} - 4$

13-14 ■ Trace un diagrama de máquina para la función.

13. $f(x) = \sqrt{x-1}$ **14.** $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$

15-16 ■ Complete la tabla.

15. $f(x) = 2(x-1)^2$ **16.** $g(x) = |2x + 3|$

x	$f(x)$
−1	
0	
1	
2	
3	

x	$g(x)$
−3	
−2	
0	
1	
3	

17-26 ■ Evalúe la función en los valores indicados.

17. $f(x) = x^2 - 6$; $f(-3), f(3), f(0), f(\frac{1}{2}), f(10)$

18. $f(x) = x^3 + 2x$; $f(-2), f(1), f(0), f(\frac{1}{3}), f(0.2)$

19. $f(x) = 2x + 1$;

$f(1), f(-2), f(\frac{1}{2}), f(a), f(-a), f(a+b)$

20. $f(x) = x^2 + 2x$;

$f(0), f(3), f(-3), f(a), f(-x), f\left(\dfrac{1}{a}\right)$

21. $g(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$;

$g(2), g(-2), g(\frac{1}{2}), g(a), g(a-1), g(-1)$

22. $h(t) = t + \dfrac{1}{t}$;

$h(1), h(-1), h(2), h(\frac{1}{2}), h(x), h\left(\dfrac{1}{x}\right)$

23. $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$;

$f(0), f(2), f(-2), f(\sqrt{2}), f(x+1), f(-x)$

24. $f(x) = x^3 - 4x^2$;

$f(0), f(1), f(-1), f(\frac{3}{2}), f\left(\dfrac{x}{2}\right), f(x^2)$

25. $f(x) = 2|x - 1|$;

$f(-2), f(0), f(\frac{1}{2}), f(2), f(x+1), f(x^2+2)$

26. $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$;

$f(-2), f(-1), f(0), f(5), f(x^2), f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

27-30 ■ Evalúe la función definida por tramos en los valores indicados.

27. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2)$

28. $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x \leq 2 \\ 2x - 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$f(-3), f(0), f(2), f(3), f(5)$

29. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } x \leq -1 \\ x & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ -1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$f(-4), f(-\frac{3}{2}), f(-1), f(0), f(25)$

30. $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ (x-2)^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$f(-5), f(0), f(1), f(2), f(5)$

31-34 ■ Use la función para evaluar las expresiones indicadas y simplifique.

31. $f(x) = x^2 + 1$; $\quad f(x+2), f(x) + f(2)$

32. $f(x) = 3x - 1$; $\quad f(2x), 2f(x)$

33. $f(x) = x + 4$; $\quad f(x^2), (f(x))^2$

34. $f(x) = 6x - 18$; $\quad f\left(\dfrac{x}{3}\right), \dfrac{f(x)}{3}$

35-42 ■ Encuentre $f(a)$, $f(a+h)$, y el cociente de diferencias $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$, donde $h \neq 0$.

35. $f(x) = 3x + 2$

36. $f(x) = x^2 + 1$

37. $f(x) = 5$

38. $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

39. $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

40. $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$

41. $f(x) = 3 - 5x + 4x^2$

42. $f(x) = x^3$

43-64 ■ Encuentre el dominio de la función.

43. $f(x) = 2x$

44. $f(x) = x^2 + 1$

45. $f(x) = 2x, \quad -1 \leq x \leq 5$

46. $f(x) = x^2 + 1, \quad 0 \leq x \leq 5$

47. $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$

48. $f(x) = \dfrac{1}{3x-6}$

49. $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-1}$

50. $f(x) = \dfrac{x^4}{x^2+x-6}$

51. $f(x) = \sqrt{x-5}$

52. $f(x) = \sqrt[4]{x+9}$

53. $f(t) = \sqrt[3]{t-1}$

54. $g(x) = \sqrt{7-3x}$

55. $h(x) = \sqrt{2x-5}$

56. $G(x) = \sqrt{x^2-9}$

57. $g(x) = \dfrac{\sqrt{2+x}}{3-x}$

58. $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2x^2+x-1}$

59. $g(x) = \sqrt[4]{x^2-6x}$

60. $g(x) = \sqrt{x^2-2x-8}$

61. $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x-4}}$

62. $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{6-x}}$

63. $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{\sqrt{2x-1}}$

64. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[4]{9-x^2}}$

65-68 ■ Se da una descripción verbal de una función. Encuentre representaciones **(a)** algebraica, **(b)** numérica y **(c)** gráfica para la función.

65. Para evaluar $f(x)$, divida la entrada entre 3 y sume $\frac{2}{3}$ al resultado.

66. Para evaluar $g(x)$, reste 4 de la entrada y multiplique el resultado por $\frac{3}{4}$.

67. Sea $T(x)$ la cantidad de impuesto de ventas cobrado en el condado de Lemon por la compra de x dólares. Para hallar el impuesto, tome 8% del precio de compra.

68. Sea $V(d)$ el volumen de una esfera de diámetro d. Para hallar el volumen, tome el cubo del diámetro, luego multiplique por π y divida entre 6.

APLICACIONES

69. Costo de producción El costo C en dólares por producir x yardas de cierta tela está dado por la función

$$C(x) = 1500 + 3x + 0.02x^2 + 0.0001x^3$$

(a) Encuentre $C(10)$ y $C(100)$.
(b) ¿Qué representan sus respuestas a la parte (a)?
(c) Encuentre $C(0)$. (Este número representa los *costos fijos*.)

70. **Área de una esfera** El área superficial S de una esfera es una función de su radio r dado por

$$S(r) = 4\pi r^2$$

(a) Encuentre $S(2)$ y $S(3)$.
(b) ¿Qué representan sus respuestas en la parte (a)?

71. **Ley de Torricelli** Un tanque contiene 50 galones de agua, que se descarga por una fuga en el fondo, haciendo que el tanque se vacíe en 20 minutos. El tanque se descarga con más rapidez cuando está casi lleno porque es mayor la presión sobre la fuga. La **Ley de Torricelli** da el volumen de agua restante en el tanque después de t minutos como

$$V(t) = 50\left(1 - \frac{t}{20}\right)^2 \qquad 0 \le t \le 20$$

(a) Encuentre $V(0)$ y $V(20)$.
(b) ¿Qué representan sus respuestas a la parte (a)?
(c) Haga una tabla de valores de $V(t)$ para $t = 0, 5, 10, 15, 20$.

72. **¿A qué distancia puede usted ver?** Debido a la curvatura de la Tierra, la distancia D máxima a que se puede ver desde la parte superior de un edificio alto o un avión a una altitud h está dada por la función

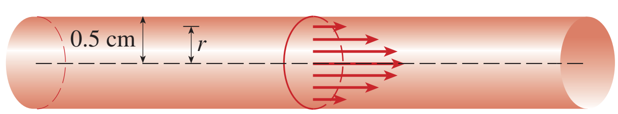
$$D(h) = \sqrt{2rh + h^2}$$

donde $r = 3960$ millas es el radio de la Tierra y D y h se miden en millas.
(a) Encuentre $D(0.1)$ y $D(0.2)$.
(b) ¿A qué distancia puede usted ver desde la cubierta de observación de la Torre CN de Toronto, a 1135 pies del suelo?
(c) Los aviones comerciales vuelan a una altitud de unas 7 millas. ¿A qué distancia puede ver el piloto?

73. **Circulación sanguínea** Cuando la sangre circula por una vena o una arteria, su velocidad v es máxima a lo largo del eje central y disminuye a medida que la distancia r desde el eje central aumenta (vea la figura). La fórmula que da v como función de r se llama **ley de flujo laminar**. Para una arteria con radio 0.5 cm, la relación entre v (en cm/s) y r (en cm) está dada por la función

$$v(r) = 18{,}500(0.25 - r^2) \qquad 0 \le r \le 0.5$$

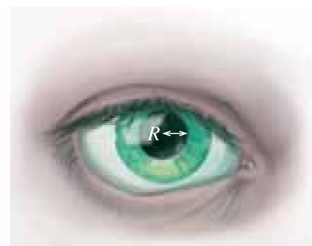
(a) Encuentre $v(0, 1)$ y $v(0, 4)$.
(b) ¿Qué le dicen sus respuestas a la parte (a) acerca de la circulación sanguínea en esta arteria?
(c) Haga una tabla de valores de $v(r) = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$.



74. **Tamaño de la pupila** Cuando aumenta la brillantez x de una fuente de luz, el ojo reacciona al disminuir el radio R de la pupila. La dependencia de R en x está dada por la función

$$R(x) = \sqrt{\frac{13 + 7x^{0.4}}{1 + 4x^{0.4}}}$$

donde R se mide en milímetros y x se mide en unidades de brillantez apropiadas.
(a) Encuentre $R(1)$, $R(10)$ y $R(100)$.
(b) Haga una tabla de valores de $R(x)$.



75. **Relatividad** Según la Teoría de la Relatividad, la longitud L de un cuerpo es una función de su velocidad v con respecto a un observador. Para un cuerpo cuya longitud en reposo es 10 m, la función está dada por

$$L(v) = 10\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

donde c es la velocidad de la luz (300,000 km/s).
(a) Encuentre $L(0.5c)$, $L(0.75c)$ y $L(0.9c)$.
(b) ¿Cómo cambia la longitud de un cuerpo cuando aumenta su velocidad?

76. **Impuesto sobre la renta** En cierto país, el impuesto sobre la renta T se valora de acuerdo con la siguiente función de ingreso x:

$$T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le x \le 10{,}000 \\ 0.08x & \text{si } 10{,}000 < x \le 20{,}000 \\ 1600 + 0.15x & \text{si } 20{,}000 < x \end{cases}$$

(a) Encuentre $T(5{,}000)$, $T(12{,}000)$, y $T(25{,}000)$.
(b) ¿Qué representan sus repuestas en el inciso (a)?

77. **Compras por Internet** Una librería de ventas por Internet cobra \$15 por envío de pedidos de menos de \$100 pero no cobra nada por pedidos de \$100 o más. El costo C de un pedido es una función del precio total x del libro comprado, dado por

$$C(x) = \begin{cases} x + 15 & \text{si } x < 100 \\ x & \text{si } x \ge 100 \end{cases}$$

(a) Encuentre $C(75)$, $C(90)$, $C(100)$ y $C(105)$.
(b) ¿Qué representan sus respuestas en la parte (a)?

78. **Costo de una estancia en hotel** Una cadena hotelera cobra \$75 por noche por las primeras dos noches y \$50 por cada noche adicional de estancia. El costo total T es una función del número de noches x que permanezca un huésped.

(a) Complete las expresiones de la siguiente función definida por tramos.

$$T(x) = \begin{cases} \square & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ \square & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

(b) Encuentre $T(2)$, $T(3)$ y $T(5)$.

(c) ¿Qué representan sus respuestas de la parte (b)?

79. Boleta de infracción por rebasar límite de velocidad En cierto estado, la máxima velocidad permitida en autopistas es de 65 mi/h, y la mínima es 40 mi/h. La multa F por violar estos límites es de \$15 por cada milla arriba del máximo o abajo del mínimo.

(a) Complete las expresiones de la siguiente función definida por partes, donde x es la velocidad a la cual una persona está viajando.

$$F(x) = \begin{cases} \square & \text{si } 0 < x < 40 \\ \square & \text{si } 40 \le x \le 65 \\ \square & \text{si } x > 65 \end{cases}$$

(b) Encuentre $F(30)$, $F(50)$ y $F(75)$.

(c) ¿Qué representan sus respuestas de la parte (b)?

80. Altura de césped El propietario de una casa poda el césped en la tarde de todos los miércoles. Trace una gráfica aproximada de la altura del césped como función del tiempo en el curso de un período de 4 semanas que empieza un domingo.

81. Cambio de temperatura Una persona coloca un pastel congelado en un horno y lo hornea durante una hora. A continuación, saca el pastel y lo deja enfriar antes de consumirlo. Trace una gráfica aproximada de la temperatura del pastel como función del tiempo.

82. Cambio diario de temperatura Las lecturas de temperatura T (en °F) fueron registradas cada 2 horas de la medianoche al mediodía en Atlanta, Georgia, el 18 de marzo de 1996. El tiempo t se midió en horas desde la medianoche. Trace una gráfica aproximada de T como función de t.

t	0	2	4	6	8	10	12
T	58	57	53	50	51	57	61

83. Crecimiento poblacional La población P (en miles) de San José, California, de 1988 a 2000 se muestra en la tabla siguiente. (Se dan estimaciones de mediados de año.) Trace una gráfica aproximada de P como función de t.

t	1988	1990	1992	1994	1996	1998	2000
P	733	782	800	817	838	861	895

DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

84. Ejemplos de funciones Al principio de esta sección estudiamos tres ejemplos de funciones ordinarias y frecuentes: la estatura es función de la edad, la temperatura es función de la fecha y el costo del porte es función del peso. Dé otros tres ejemplos de funciones de nuestra vida diaria.

85. Cuatro formas de representar una función En el cuadro de la página 148 representamos cuatro funciones diferentes verbal, algebraica, visual y numéricamente. Considere una función que pueda representarse en las cuatro formas y escriba las cuatro representaciones.

2.2 GRÁFICAS DE FUNCIONES

Graficar funciones por localización de puntos ▶ Graficar funciones con calculadora graficadora ▶ Graficar funciones definidas por tramos ▶ La prueba de la recta vertical ▶ Ecuaciones que definen funciones

La forma más importante de visualizar una función es por medio de su gráfica. En esta sección investigamos con más detalle el concepto de graficar funciones.

▼ Graficar funciones por localización de puntos

Para graficar una función f, localizamos los puntos $(x, f(x))$ en un plano de coordenadas. En otras palabras, localizamos los puntos (x, y) cuya coordenada x es una entrada y cuya coordenada y es la correspondiente salida de la función.

> **LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN**
>
> Si f es una función con dominio A, entonces la **gráfica** de f es el conjunto de pares ordenados
>
> $$\{(x, f(x)) \mid x \in A\}$$
>
> localizados en un plano de coordenadas. En otras palabras, la gráfica de f es el conjunto de todos los puntos (x, y) tales que $y = f(x)$; esto es, la gráfica de f es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$.

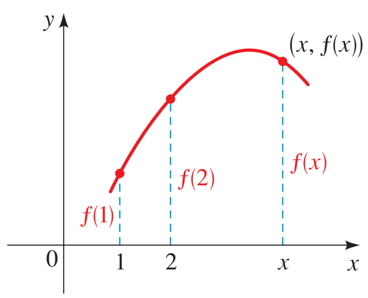
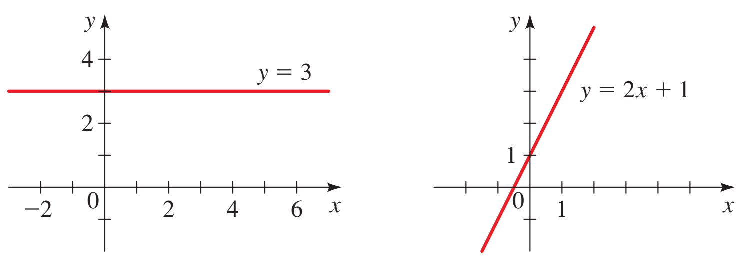


FIGURA 1 La altura de la gráfica sobre el punto x es el valor de $f(x)$.

La gráfica de una función f da un retrato del comportamiento o "historia de la vida" de la función. Podemos leer el valor de $f(x)$ a partir de la gráfica como la altura de la gráfica arriba del punto x (vea Figura 1).

Una función f de la forma $f(x) = mx + b$ se denomina **función lineal** porque su gráfica es la gráfica de la ecuación $y = mx + b$, que representa una recta con pendiente m y punto de intersección b en y. Un caso especial de una función lineal se presenta cuando la pendiente es $m = 0$. La función $f(x) = b$, donde b es un número determinado, recibe el nombre de **función constante** porque todos sus valores son el mismo número, es decir, b. Su gráfica es la recta horizontal $y = b$. La Figura 2 muestra las gráficas de la función constante $f(x) = 3$ y la función lineal $f(x) = 2x + 1$.



La función constante $f(x) = 3$ La función lineal $f(x) = 2x + 1$

FIGURA 2

EJEMPLO 1 | Graficar funciones por localización de puntos

Trace las gráficas de las siguientes funciones.

(a) $f(x) = x^2$ **(b)** $g(x) = x^3$ **(c)** $h(x) = \sqrt{x}$

SOLUCIÓN Primero hacemos una tabla de valores. A continuación, localizamos los puntos dados por la tabla y los unimos con una curva suave sin irregularidades para obtener la gráfica. Las gráficas están trazadas en la Figura 3 en la página siguiente.

x	$f(x) = x^2$
0	0
$\pm\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
±1	1
±2	4
±3	9

x	$g(x) = x^3$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
1	1
2	8
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$
-1	-1
-2	-8

x	$h(x) = \sqrt{x}$
0	0
1	1
2	$\sqrt{2}$
3	$\sqrt{3}$
4	2
5	$\sqrt{5}$

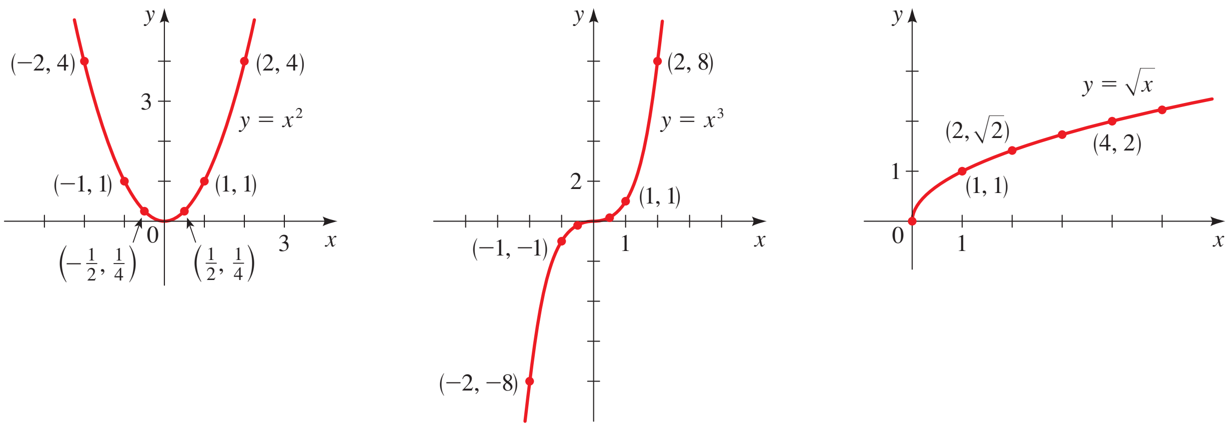


FIGURA 3 (a) $f(x) = x^2$ (b) $g(x) = x^3$ (c) $h(x) = \sqrt{x}$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **11, 15** Y **19**

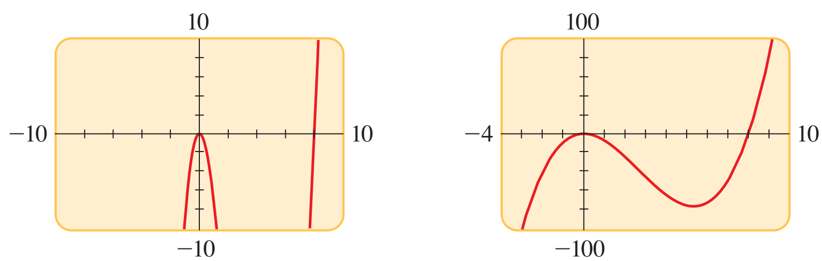
Graficar funciones con calculadora graficadora

Una forma cómoda de graficar una función es usar una calculadora graficadora. Como la gráfica de una función f es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$, podemos usar los métodos de la Sección 1.9 para graficar funciones en una calculadora graficadora.

EJEMPLO 2 | Graficar una función con calculadora graficadora

Use una calculadora graficadora para graficar la función $f(x) = x^3 - 8x^2$ en un rectángulo de vista apropiado.

SOLUCIÓN Para graficar la función $f(x) = x^3 - 8x^2$, debemos graficar la ecuación $y = x^3 - 8x^2$. En la calculadora graficadora TI-83, el rectángulo de vista predeterminado da la gráfica de la Figura 4(a). Pero esta gráfica parece rebasar la parte superior y la inferior de la pantalla. Necesitamos expandir el eje vertical para obtener una mejor representación de la gráfica. El rectángulo de vista $[-4, 10]$ por $[-100, 100]$ da un retrato más completo de la gráfica, como se ve en la Figura 4(b).



(a) (b)

FIGURA 4 Gráfica de la función $f(x) = x^3 - 8x^2$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **29**

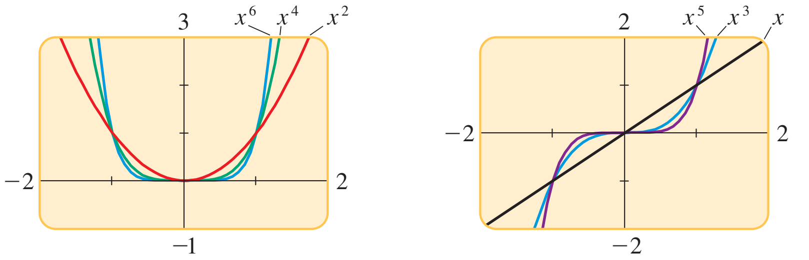
EJEMPLO 3 | Una familia de funciones potencia

(a) Grafique las funciones $f(x) = x^n$ para $n = 2, 4$ y 6 en el rectángulo de vista $[-2, 2]$ por $[-1, 3]$.

(b) Grafique las funciones $f(x) = x^n$ para $n = 1, 3$ y 5 en el rectángulo de vista $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$.

(c) ¿Qué conclusiones se pueden sacar de estas gráficas?

SOLUCIÓN Para graficar la función $f(x) = x^n$, graficamos la ecuación $y = x^n$. Las gráficas para las partes (a) y (b) se muestran en la Figura 5.



(a) Potencias pares de x (b) Potencias impares de x

FIGURA 5 Una familia de funciones de potencia $f(x) = x^n$

(c) Vemos que la forma general de la gráfica de $f(x) = x^n$ depende de si n es par o impar.

Si n es par, la gráfica de $f(x) = x^n$ es similar a la parábola $y = x^2$.

Si n es impar, la gráfica de $f(x) = x^n$ es similar a la de $y = x^3$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **69**

Observe de la Figura 5 que cuando n crece, la gráfica de $y = x^n$ se hace más plana cerca de 0 y más pronunciado cuando $x > 1$. Cuando $0 < x < 1$, las potencias inferiores de x son las funciones "más grandes". Pero cuando $x > 1$, las potencias superiores de x son las funciones dominantes.

Graficar funciones definidas por tramos

Una función definida por tramos está definida por diferentes fórmulas en diferentes partes de su dominio. Como es de esperarse, la gráfica de tal función está formada por tramos separados.

EJEMPLO 4 | Graficar una función definida por tramos

Trace la gráfica de la función.

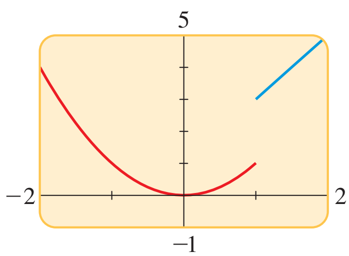
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Si $x \le 1$, entonces $f(x) = x^2$, y la parte de la gráfica a la izquierda de $x = 1$ coincide con la gráfica de $y = x^2$, que trazamos en la Figura 3. Si $x > 1$, entonces $f(x) = 2x + 1$, y la parte de la gráfica a la derecha de $x = 1$ coincide con la recta $y = 2x + 1$, que graficamos en la Figura 2. Esto hace posible que tracemos la gráfica de la Figura 6.

El punto sólido en (1, 1) indica que este punto está incluido en la gráfica; el punto abierto en (1, 3) indica que este punto está excluido de la gráfica.

En varias calculadoras graficadoras, la gráfica de la Figura 6 puede ser producida al usar las funciones lógicas de la calculadora. Por ejemplo, en la TI-83 la siguiente ecuación da la gráfica requerida:

$Y_1 = (X \le 1)X^2 + (X > 1)(2X + 1)$



(Para evitar la recta vertical extraña entre las dos partes de la gráfica, ponga la calculadora en el modo `Dot`.)

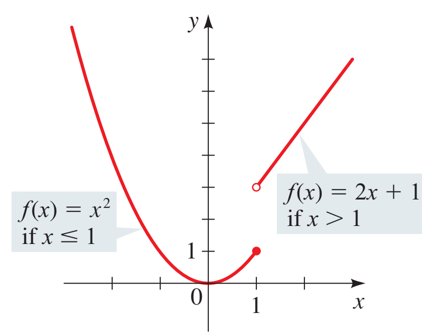


FIGURA 6

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **35**

EJEMPLO 5 | Gráfica de la función valor absoluto

Trace la gráfica de la función valor absoluto $f(x) = |x|$.

SOLUCIÓN Recuerde que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Usando el mismo método que en el Ejemplo 4, observamos que la gráfica de f coincide con la recta $y = x$ a la derecha del eje y y coincide con la recta $y = -x$ a la izquierda del eje y (vea Figura 7).

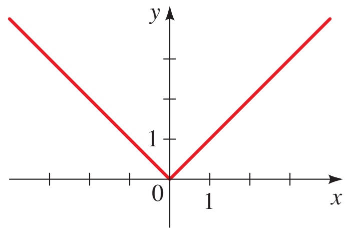


FIGURA 7 Gráfica de $f(x) = |x|$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **23**

La **función entero** mayor está definida por

$$[\![x]\!] = \text{máximo entero menor o igual a } x$$

Por ejemplo, $[\![2]\!] = 2$, $[\![2.3]\!] = 2$, $[\![1.999]\!] = 1$, $[\![0.002]\!] = 0$, $[\![-3.5]\!] = -4$, y $[\![-0.5]\!] = -1$.

EJEMPLO 6 | Gráfica de la función entero mayor

Trace la gráfica de $f(x) = [\![x]\!]$

SOLUCIÓN La tabla muestra los valores de f para algunos valores de x. Observe que $f(x)$ es constante entre enteros consecutivos, de modo que la gráfica entre enteros es un segmento de recta horizontal, como se ve en la Figura 8.

x	$[\![x]\!]$
$\vdots$	$\vdots$
$-2 \leq x < -1$	-2
$-1 \leq x < 0$	-1
$0 \leq x < 1$	0
$1 \leq x < 2$	1
$2 \leq x < 3$	2
$\vdots$	$\vdots$

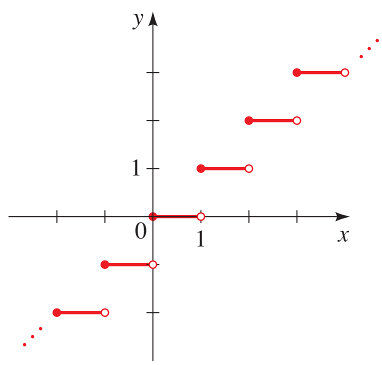


FIGURA 8 La función entero mayor, $y = [\![x]\!]$

La función entero mayor es un ejemplo de una **función escalón**. El siguiente ejemplo da un ejemplo real de una función escalón.

EJEMPLO 7 | La función de costo para llamadas telefónicas de larga distancia

El costo de una llamada telefónica de larga distancia diurna de Toronto, Canadá, a Mumbai, India, es de 69 centavos por el primer minuto y 58 centavos por cada minuto adicional (o parte de un minuto). Trace la gráfica del costo C (en dólares) de la llamada telefónica como función del tiempo t (en minutos).

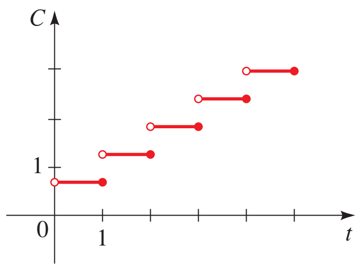


FIGURA 9 Costo de una llamada de larga distancia

SOLUCIÓN Sea $C(t)$ el costo por t minutos. Como $t > 0$, el dominio de la función es $(0, \infty)$. De la información dada tenemos

$$\begin{aligned} C(t) &= 0.69 && \text{si } 0 < t \leq 1 \\ C(t) &= 0.69 + 0.58 = 1.27 && \text{si } 1 < t \leq 2 \\ C(t) &= 0.69 + 2(0.58) = 1.85 && \text{si } 2 < t \leq 3 \\ C(t) &= 0.69 + 3(0.58) = 2.43 && \text{si } 3 < t \leq 4 \end{aligned}$$

y así sucesivamente. La gráfica se muestra en la Figura 9.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **81** ■

Las funciones continuas están definidas en forma más precisa en la Sección 13.2, en la página 851.

Una función se llama **continua** si su gráfica no tiene "rupturas" o "huecos". Las funciones de los Ejemplos 1, 2, 3 y 5 son continuas; las funciones de los Ejemplos 4, 6 y 7 no son continuas.

▼ La prueba de la recta vertical

La gráfica de una función es una curva en el plano *xy*. Pero surge la pregunta: ¿Cuáles curvas del plano *xy* son gráficas de funciones? Esto se contesta por medio de la prueba siguiente.

> **LA PRUEBA DE LA RECTA VERTICAL**
>
> Una curva en el plano de coordenadas es la gráfica de una función si y sólo si ninguna recta vertical cruza la curva más de una vez.

Podemos ver de la Figura 10 por qué la Prueba de la Recta Vertical es verdadera. Si cada recta vertical $x = a$ cruza la curva sólo una vez en (a, b), entonces exactamente un valor funcional está definido por $f(a) = b$. Pero si una recta $x = a$ cruza la curva dos veces, en (a, b) y en (a, c), entonces la curva no puede representar una función porque una función no puede asignar dos valores diferentes a a.

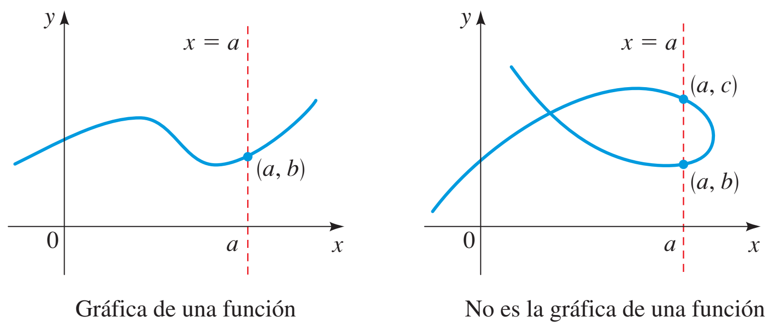


FIGURA 10 Prueba de la Recta Vertical

EJEMPLO 8 | Uso de la Prueba de la Recta Vertical

Usando la Prueba de la Recta Vertical, vemos que las curvas en las partes (b) y (c) de la Figura 11 representan funciones, mientras que las de las partes (a) y (d) no la representan.

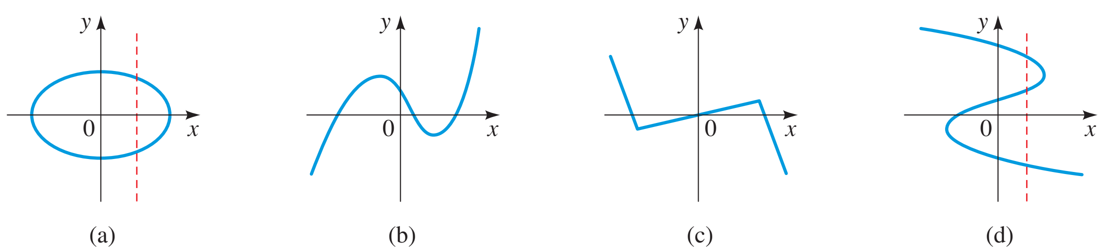


FIGURA 11

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **51** ■

▼ Ecuaciones que definen funciones

Cualquier ecuación con las variables x y y define una relación entre estas variables. Por ejemplo, la ecuación

$$y - x^2 = 0$$

define una relación entre y y x. ¿Esta ecuación define a y como *función* de x? Para saberlo, despejamos y y obtenemos

$$y = x^2$$

Vemos que la ecuación define una regla, o función, que da un valor de y por cada valor de x. Podemos expresar esta regla en notación de funciones como

$$f(x) = x^2$$

Pero no toda ecuación define a y como función de x, como lo muestra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 9 | Ecuaciones que definen funciones

¿La ecuación define a y como función de x?

(a) $y - x^2 = 2$ **(b)** $x^2 + y^2 = 4$

SOLUCIÓN

(a) Despejando y en términos de x tendremos

$$y - x^2 = 2$$

$$y = x^2 + 2 \qquad \text{Sume } x^2$$

La última ecuación es una regla que da un valor de y por cada valor de x, de modo que define a y como función de x. Podemos escribir la función como $f(x) = x^2 + 2$.

(b) Intentamos despejar y en términos de x:

$$x^2 + y^2 = 4$$

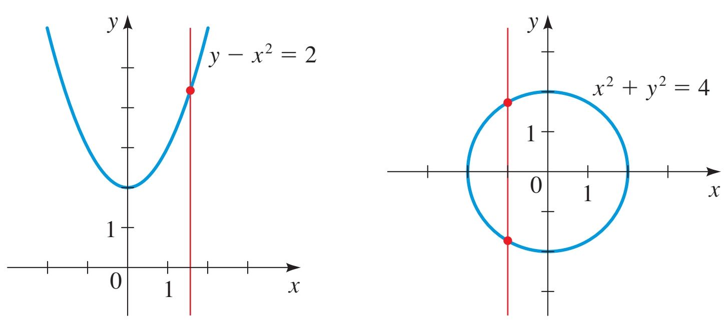
$$y^2 = 4 - x^2 \qquad \text{Reste } x^2$$

$$y = \pm\sqrt{4 - x^2} \qquad \text{Tome raíces cuadradas}$$

La última ecuación da dos valores de y por un valor dado de x. Entonces, la ecuación no define a y como una función de x.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **57** Y **61** ■

Las gráficas de las ecuaciones del Ejemplo 9 se ilustran en la Figura 12. La Prueba de la Recta Vertical muestra gráficamente que la ecuación del Ejemplo 9(a) define una función, pero la ecuación del Ejemplo 9(b) no la define.



(a) (b)

FIGURA 12

Stanford University News Service

DONALD KNUTH nació en Milwaukee en 1938 y es profesor emérito de Ciencias de la Computación en la Universidad de Stanford. Cuando Knuth era estudiante de secundaria, quedó fascinado con gráficas de funciones y laboriosamente dibujó cientos de ellas porque quería ver el comportamiento de una gran variedad de funciones. (Hoy en día, desde luego, es mucho más fácil usar computadoras y calculadoras graficadoras para hacer esto.) Cuando todavía era estudiante graduado en el Caltech, empezó a escribir una monumental serie de libros titulada *The Art of Computer Programming*.

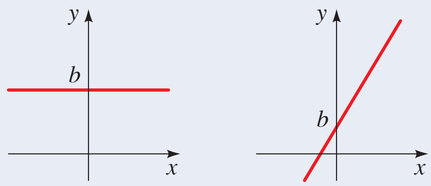
Knuth es famoso por su invento del ENTRA, que es un sistema de ajuste de tipos asistido por computadora. Este sistema fue utilizado en la preparación del manuscrito para este libro.

Knuth ha recibido numerosos honores, entre ellos la elección como Profesor Adjunto de la Academia de Ciencias de Francia, y como Miembro de Número de la Royal Society. El presidente Carter le otorgó la Medalla Nacional de Ciencias en 1979.

La tabla siguiente muestra las gráficas de algunas funciones que con frecuencia se ven en este libro.

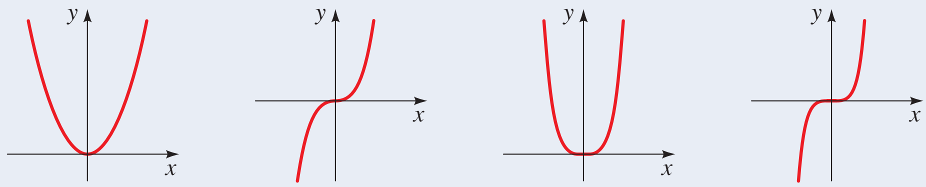
ALGUNAS FUNCIONES Y SUS GRÁFICAS

Funciones lineales
$f(x) = mx + b$



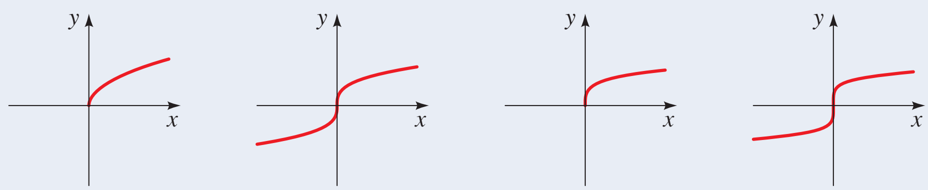
$f(x) = b$ $\quad$ $f(x) = mx + b$

Funciones potencia
$f(x) = x^n$



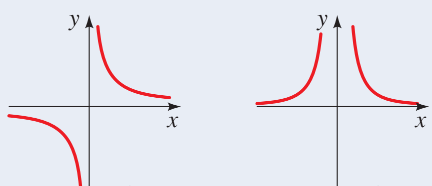
$f(x) = x^2$ $\quad$ $f(x) = x^3$ $\quad$ $f(x) = x^4$ $\quad$ $f(x) = x^5$

Funciones raíz
$f(x) = \sqrt[n]{x}$



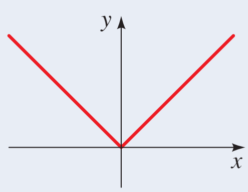
$f(x) = \sqrt{x}$ $\quad$ $f(x) = \sqrt[3]{x}$ $\quad$ $f(x) = \sqrt[4]{x}$ $\quad$ $f(x) = \sqrt[5]{x}$

Funciones recíprocas
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$



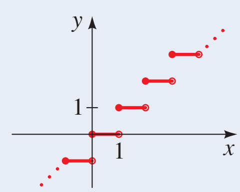
$f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad$ $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Función valor absoluto
$f(x) = |x|$



$f(x) = |x|$

Función entero mayor
$f(x) = [\![x]\!]$



$f(x) = [\![x]\!]$

2.2 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Para graficar la función f, localizamos los puntos $(x,\_)$ en un plano de coordenadas. Para graficar $f(x) = x^3 + 2$, localizamos los puntos $(x,\_)$. Por lo tanto, el punto $(2,\_\_\_)$ está sobre la gráfica de f. La altura de la gráfica de f arriba del eje x cuando $x = 2$ es ____.

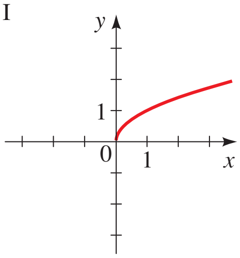
2. Si $f(2) = 3$, entonces el punto $(2,\_\_\_)$ está sobre la gráfica de f.

3. Si el punto (2, 3) está sobre la gráfica de f, entonces $f(2) =$ ____.

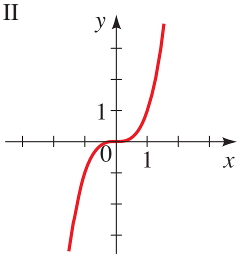
4. Relacione la función con su gráfica.

(a) $f(x) = x^2$ **(b)** $f(x) = x^3$
(c) $f(x) = \sqrt{x}$ **(d)** $f(x) = |x|$

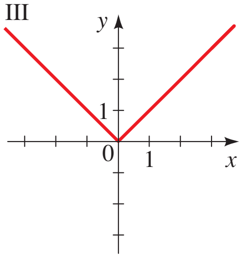
I



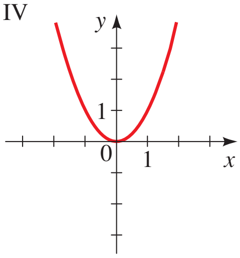
II



III



IV



HABILIDADES

5-28 ■ Trace la gráfica de la función haciendo primero una tabla de valores.

5. $f(x) = 2$ **6.** $f(x) = -3$

7. $f(x) = 2x - 4$ **8.** $f(x) = 6 - 3x$

9. $f(x) = -x + 3, \quad -3 \le x \le 3$

10. $f(x) = \dfrac{x-3}{2}, \quad 0 \le x \le 5$

11. $f(x) = -x^2$ **12.** $f(x) = x^2 - 4$

13. $h(x) = 16 - x^2$ **14.** $g(x) = (x-3)^2$

15. $g(x) = x^3 - 8$ **16.** $g(x) = (x+2)^3$

17. $g(x) = x^2 - 2x$ **18.** $h(x) = 4x^2 - x^4$

19. $f(x) = 1 + \sqrt{x}$ **20.** $f(x) = \sqrt{x+4}$

21. $g(x) = -\sqrt{x}$ **22.** $g(x) = \sqrt{-x}$

23. $H(x) = |2x|$ **24.** $H(x) = |x+1|$

25. $G(x) = |x| + x$ **26.** $G(x) = |x| - x$

27. $f(x) = |2x - 2|$ **28.** $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$

29-32 ■ Grafique la función en cada uno de los rectángulos de vista dados, y seleccione el que produzca la gráfica más apropiada de la función.

29. $f(x) = 8x - x^2$
(a) $[-5, 5]$ por $[-5, 5]$
(b) $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$
(c) $[-2, 10]$ por $[-5, 20]$
(d) $[-10, 10]$ por $[-100, 100$

30. $g(x) = x^2 - x - 20$
(a) $[-2, 2]$ por $[-5, 5]$
(b) $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$
(c) $[-7, 7]$ por $[-25, 20]$
(d) $[-10, 10]$ por $[-100, 100]$

31. $h(x) = x^3 - 5x - 4$
(a) $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$
(b) $[-3, 3]$ por $[-10, 10]$
(c) $[-3, 3]$ por $[-10, 5]$
(d) $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$

32. $k(x) = \frac{1}{32}x^4 - x^2 + 2$
(a) $[-1, 1]$ por $[-1, 1]$
(b) $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$
(c) $[-5, 5]$ por $[-5, 5]$
(d) $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$

33-46 ■ Trace la gráfica de la función definida por tramos.

33. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

34. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \le 1 \\ x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

35. $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 2 \\ x - 1 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

36. $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x < -2 \\ 5 & \text{si } x \ge -2 \end{cases}$

37. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \le 0 \\ x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

38. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x < -1 \\ 3 - x & \text{si } x \ge -1 \end{cases}$

39. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -1 \\ 1 & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ -1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

40. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

41. $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \le -1 \\ x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

42. $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \le 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

43. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \le 2 \\ 3 & \text{si } |x| > 2 \end{cases}$

44. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } |x| \le 1 \\ 1 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$

45. $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x < -2 \\ x^2 & \text{si } -2 \le x \le 2 \\ -x + 6 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

46. $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \le 0 \\ 9 - x^2 & \text{si } 0 < x \le 3 \\ x - 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

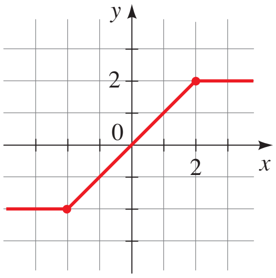
47-48 ■ Use una calculadora graficadora para trazar la gráfica de la función definida por tramos. (Vea la nota al margen, pág. 155.)

47. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

48. $f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & \text{si } x > 1 \\ (x - 1)^3 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$

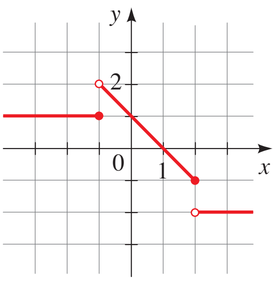
49-50 ■ Nos dan la gráfica de una función definida por tramos. Encuentre una fórmula para la función en la forma indicada.

49.



$f(x) = \begin{cases} \quad & \text{si } x < -2 \\ \quad & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ \quad & \text{si } x > 2 \end{cases}$

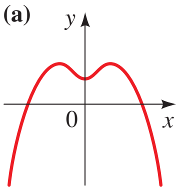
50.



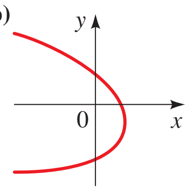
$f(x) = \begin{cases} \quad & \text{si } x \leq -1 \\ \quad & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ \quad & \text{si } x > 2 \end{cases}$

51-52 ■ Use la Prueba de la Recta Vertical para determinar si la curva es la gráfica de una función de x.

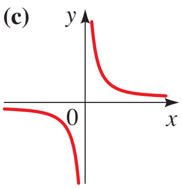
51. **(a)**



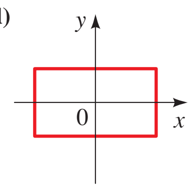
(b)



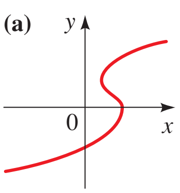
(c)



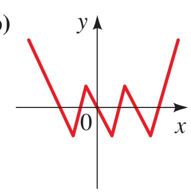
(d)



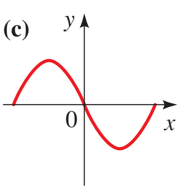
52. **(a)**



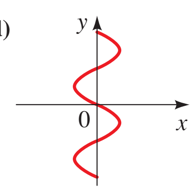
(b)



(c)

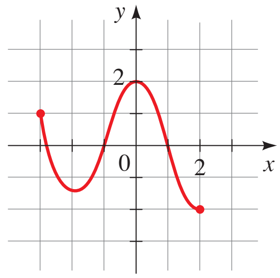


(d)

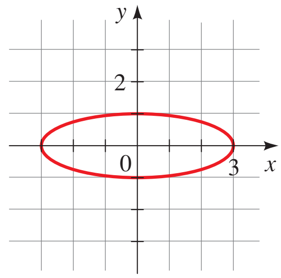


53-56 ■ Use la Prueba de la Recta Vertical para determinar si la curva es la gráfica de una función de x. Si lo es, exprese el dominio y el rango de la función.

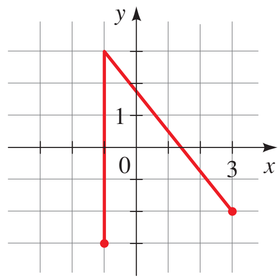
53.



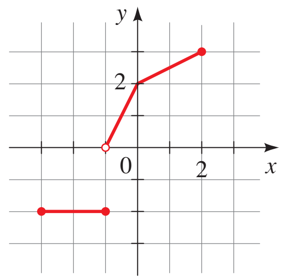
54.



55.



56.



57-68 ■ Determine si la ecuación define y como función de x. (Vea Ejemplo 9.)

57. $x^2 + 2y = 4$

58. $3x + 7y = 21$

59. $x = y^2$

60. $x^2 + (y - 1)^2 = 4$

61. $x + y^2 = 9$

62. $x^2 + y = 9$

63. $x^2y + y = 1$

64. $\sqrt{x} + y = 12$

65. $2|x| + y = 0$

66. $2x + |y| = 0$

67. $x = y^3$

68. $x = y^4$

69-74 ■ Nos dan una familia de funciones. En las partes (a) y (b) grafique en el rectángulo de vista indicado todos los miembros de la familia dados. En la parte (c) exprese las conclusiones que pueda hacer a partir de sus gráficas.

69. $f(x) = x^2 + c$
- **(a)** $c = 0, 2, 4, 6;\quad [-5, 5]$ por $[-10, 10]$
- **(b)** $c = 0, -2, -4, -6;\quad [-5, 5]$ por $[-10, 10]$
- **(c)** ¿En qué forma afecta la gráfica el valor de c?

70. $f(x) = (x - c)^2$
- **(a)** $c = 0, 1, 2, 3;\quad [-5, 5]$ por $[-10, 10]$
- **(b)** $c = 0, -1, -2, -3;\quad [-5, 5]$ por $[-10, 10]$
- **(c)** ¿En qué forma afecta la gráfica el valor de c?

71. $f(x) = (x - c)^3$
- **(a)** $c = 0, 2, 4, 6;\quad [-10, 10]$ por $[-10, 10]$
- **(b)** $c = 0, -2, -4, -6;\quad [-10, 10]$ por $[-10, 10]$
- **(c)** ¿En qué forma afecta la gráfica el valor de c?

72. $f(x) = cx^2$
- **(a)** $c = 1, \frac{1}{2}, 2, 4;\quad [-5, 5]$ por $[-10, 10]$
- **(b)** $c = 1, -1, -\frac{1}{2}, -2;\quad [-5, 5]$ por $[-10, 10]$
- **(c)** ¿En qué forma afecta la gráfica el valor de c?

73. $f(x) = x^c$
- **(a)** $c = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6};\quad [-1, 4]$ por $[-1, 3]$
- **(b)** $c = 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5};\quad [-3, 3]$ por $[-2, 2]$
- **(c)** ¿En qué forma afecta la gráfica el valor de c?

74. $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$

(a) $n = 1, 3;\quad [-3, 3]$ por $[-3, 3]$
(b) $n = 2, 4;\quad [-3, 3]$ por $[-3, 3]$
(c) ¿En qué forma afecta la gráfica el valor de n?

75-78 ■ Encuentre una función cuya gráfica es la curva dada.

75. El segmento de recta que une los puntos $(-2, 1)$ y $(4, -6)$

76. El segmento de recta que une los puntos $(-3, -2)$ y $(6, 3)$

77. La mitad superior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$

78. La mitad inferior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$

APLICACIONES

79. Globo de meteorología Cuando se infla un globo de meteorología, el grueso T de la capa de caucho está relacionada con el globo mediante la ecuación

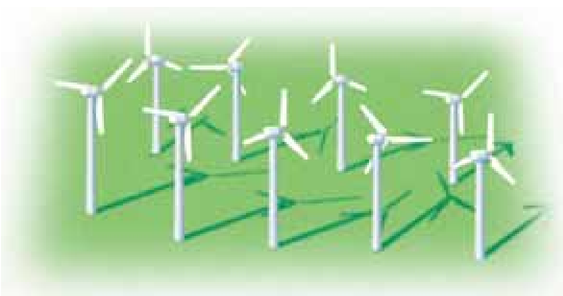
$$T(r) = \frac{0.5}{r^2}$$

donde T y r se miden en centímetros. Grafique la función T para valores de r entre 10 y 100.

80. Potencia generada por una turbina de viento La potencia producida por una turbina de viento depende de la velocidad del viento. Si un molino de viento tiene aspas de 3 metros de largo, entonces la potencia P producida por la turbina está modelada por

$$P(v) = 14.1v^3$$

donde P se mide en watts (W) y v se mide en metros por segundo (m/s). Grafique la función P para velocidades de viento entre 1 m/s y 10 m/s.



81. Tarifas de una empresa generadora de energía eléctrica Westside Energy cobra a sus consumidores de energía eléctrica una tarifa base de \$6.00 por mes, más \$0.10 por kilowatt-hora (kWh) por los primeros 300 kWh consumidos y \$0.06 por kWh por todo lo consumido de más de 300 kWh. Suponga que un cliente usa x kWh de electricidad en un mes.

(a) Exprese el costo mensual E como una función de x definida por tramos.
(b) Grafique la función E para $0 \le x \le 600$.

82. Función de un taxi Una compañía de taxis cobra \$2.00 por la primera milla (o parte de milla) y 20 centavos por cada décimo sucesivo de milla (o parte). Exprese el costo C (en dólares) de un viaje como función definida por partes de la distancia x recorrida (en millas) para $0 < x < 2$, y trace la gráfica de esta función.

83. Tarifas postales La tarifa nacional de portes por cartas de primera clase, de 3.5 onzas o menos, es de 44 centavos por la primera onza (o menos), más 17 centavos por cada onza adicional (o parte de una onza). Exprese el porte P como una función definida por partes del peso x de una carta, con $0 < x \le 3.5$, y trace la gráfica de esta función.

DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

84. ¿Cuándo una gráfica representa a una función? Para todo entero n, la gráfica de la ecuación $y = x^n$ es la gráfica de una función, es decir, $f(x) = x^n$. Explique por qué la gráfica de $x = y^2$ *no es* la gráfica de una función de x. ¿La gráfica de $x = y^3$ es una gráfica de la función de x? Si es así, ¿de qué función de x es la gráfica? Determine para qué enteros n la gráfica de $x = y^n$ es la gráfica de una función de x.

85. Funciones escalón En el Ejemplo 7 y los Ejercicios 82 y 83 nos dan funciones cuyas gráficas están formadas por segmentos de recta horizontal. Es frecuente que tales funciones reciban el nombre de *funciones escalón*, porque sus gráficas se ven como escaleras. Dé algunos otros ejemplos de funciones escalón que se ven en la vida diaria.

86. Funciones escalón alargadas Trace gráficas de las funciones $f(x) = [\![x]\!]$, $g(x) = [\![2x]\!]$ y $h(x) = [\![3x]\!]$ en gráficas separadas. ¿Cómo están relacionadas? Si n es un entero positivo, ¿qué aspecto tiene la gráfica de $k(x) = [\![nx]\!]$?

87. Gráfica del valor absoluto de una función

(a) Trace las gráficas de las funciones

$$f(x) = x^2 + x - 6$$

y

$$g(x) = |x^2 + x - 6|$$

¿Cómo están relacionadas las gráficas de f y g?

(b) Trace las gráficas de las funciones $f(x) = x^4 - 6x^2$ y $g(x) = |x^4 - 6x^2|$. ¿Cómo están relacionadas las gráficas de f y g?

(c) En general, si $g(x) = |f(x)|$, ¿cómo están relacionadas las gráficas de f y g? Trace gráficas para ilustrar su respuesta.

PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO **Relaciones y funciones**

En este proyecto exploramos el concepto de función al compararlo con el concepto de una relación. Se puede hallar el proyecto en el sitio web acompañante de este libro: **www.stewartmath.com**